Дорогие одиннадцатиклассники!

Видели ли вы когда-нибудь, как при строительстве отдельные блоки и конструкции, дополняя друг друга, складываются в единое сооружение? Именно такой процесс преобразования отдельных частей в единое целое вы будете наблюдать, изучая геометрию в 11 классе.

В курсе стереометрии 10 класса вы познакомились с основными фигурами в пространстве — точками, прямыми и плоскостями, исследовали их свойства и особенности взаимного расположения. Все эти простейшие фигуры вместе с хорошо известными вам плоскими фигурами являются элементами геометрических тел, которые будут рассматриваться в курсе геометрии 11 класса.

Как известно, геометрия не является чисто абстрактной наукой — фигуры и формы, которые она изучает, можно найти в реальной жизни, даже не покидая школьный кабинет. Советуем вам обратить особое внимание на применение понятий и фактов, изложенных в этом учебнике, в различных областях человеческой деятельности. Не забывайте, что любые знания имеют настоящую ценность только тогда, когда они основаны на опыте и применяются на практике.

Желаем, чтобы дорога к знаниям была для вас легкой и радостной, а все препятствия, которые могут на ней встретиться, вы преодолевали благодаря настойчивости и воле к победам в науке. В добрый путь!

Как пользоваться учебником

Учебник содержит четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов, а параграфы — из пунктов. В тексте наряду с теоретическим материалом приводятся примеры решения задач. Наиболее важные понятия и факты выделены полужирным шрифтом.

Упражнения и задачи, представленные в учебнике, разделены на несколько групп. Устные упражнения (рубрика *«Обсуждаем теорию»*) помогут вам понять, насколько успешно вы усвоили теоретический материал. Эти упражнения не обязательно выполнять мысленно — для их решения вы можете использовать рисунки, провести необходимые рассуждения в черновике. После устных можно переходить к практическим упражнениям (рубрика *«Моделируем»*). Далее идут письменные задачи (рубрика *«Решаем задачи»*). Сначала проверьте свои знания, выполняя задания *уровня* А. Некоторые из устных и практических упражнений и задач уровня А отмечены значком «•» как соответствующие *начальному* уровню, остальные задания уровня А соответствуют *среднему* уровню. Более сложными являются задачи ***уровня*** Б (*достаточный* уровень). И, наконец, если вы хорошо усвоили материал и желаете проявить свои творческие способности, вас ожидают задачи ***уровня*** В (*высокий* уровень). После каждого параграфа в рубрике ***«Повторение»*** указано, какие именно понятия и факты необходимо вспомнить для успешного изучения материала следующей темы, и приведены задачи, которые подготовят вас к его восприятию. Решать все задачи всех групп не обязательно.

Дополнительные задачи к главам помогут вам обобщить изученное, а задачи повышенной сложности раскроют новые грани геометрии, красоту нестандартного мышления и подарят вам радость научных открытий.

Устные упражнения, задания уровней А и Б и самые простые задания уровня В рассчитаны на тех, кто изучает геометрию на академическом уровне. Для работы на профильном уровне предусмотрены задания уровней Б, В, дополнительные задачи и задачи повышенной сложности. Приобрести практические навыки при решении задач из рубрики «Моделируем» будет полезно независимо от уровня изучения геометрии.

В учебнике помещены ***контрольные вопросы*** и ***тестовые задания для самопроверки***, благодаря которым вы сможете лучше подготовиться к тематическому оцениванию. Учащимся, изучающим геометрию на академическом уровне, достаточно решить первые девять заданий теста и одно (на выбор) из заданий 10–12. Учащиеся, изучающие геометрию на профильном уровне, должны решить все 12 заданий теста.

Итоговые обзоры в конце каждой главы — своеобразный геометрический компас, с помощью которого вы сможете ориентироваться в изученном материале. ***Приложения***, приведенные в конце учебника, будут способствовать углублению знаний по отдельным темам, которые изучаются, а ***исторические справки*** к главам познакомят с некоторыми интересными геометрическими фактами и деятельностью выдающихся ученых-геометров.

Условные обозначения:

→ — задачи, предназначенные для выполнения дома

□ — начало доказательства теоремы

■ — конец доказательства теоремы

✸ — материал, предназначенный для учащихся, изучающих геометрию на профильном уровне

Глава I
Координаты, векторы и геометрические преобразования в пространстве

§ 1. Декартовы координаты в пространстве
§ 2. Движения в пространстве
§ 3. Подобие пространственных фигур
§ 4. Векторы в пространстве
§ 5. Применение метода координат и векторов к решению стереометрических задач

Геометрия приближает разум к истине.

Платон, древнегреческий философ

С координатами, векторами и геометрическими преобразованиями вы знакомились в курсе планиметрии. На примерах из физики и информатики вы могли убедиться в том, что эти геометрические понятия широко используются в других науках.

Пространственная геометрия открывает новые возможности для реализации уже известных вам методов — векторного, координатного, геометрических преобразований. Поэтому, изучая данную главу, попробуйте выделить общие и отличительные свойства координат, векторов, преобразований на плоскости и в пространстве. Такой сравнительный анализ поможет вам лучше понять и обобщить материал для того, чтобы эффективно применять полученные знания на практике.

Особое внимание советуем уделить прикладным и практическим заданиям — во многом благодаря им складывается тот бесценный опыт, ради которого и изучают геометрию в школе.

§ 1. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

1.1. Прямоугольная декартова система координат в пространстве

Как известно, расположение точки на координатной прямой однозначно описывается одной координатой. Из курса планиметрии вы знакомы с прямоугольной декартовой системой координат на плоскости. Напомним, что для ее введения через произвольную точку плоскости O проводят две взаимно перпендикулярные координатные оси Ox и Oy (рис. 1). При таких условиях каждой точке плоскости A ставится в соответствие упорядоченная пара чисел $(x; y)$ — координаты оснований перпендикуляров AA_x и AA_y, проведенных из данной точки к координатным осям. Числа x и y называют координатами точки A; эти две координаты однозначно описывают расположение точки на плоскости.

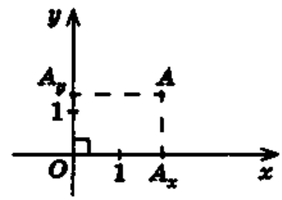


Рис. 1. Введение координат точки на плоскости

Вполне естественно, что для описания расположения точки в пространстве необходимо иметь три координаты — ведь, например, бабочка перемещается в воздухе не только вперед-назад и вправо-влево, но и вверх-вниз.

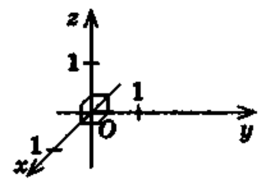


Рис. 2. Прямоугольная система координат в пространстве

Итак, рассмотрим три взаимно перпендикулярные координатные оси Ox, Oy и Oz с общей точкой O (*началом координат*) и равными единичными отрезками на осях (рис. 2). Ось Ox называют *осью абсцисс*, ось Oy — *осью ординат*, ось Oz — *осью аппликат*, а плоскости Oxy, Oxz и Oyz — *координатными плоскостями*. Заданную таким образом систему координат называют *прямоугольной декартовой системой координат* в пространстве.

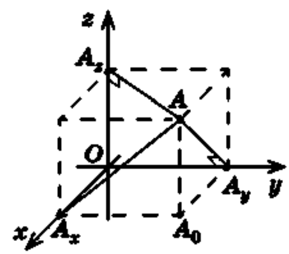


Рис. 3. Определение координат точки в пространстве

Для определения координат произвольной точки пространства A проведем из данной точки перпендикуляры AA_x, AA_y и AA_z к осям Ox, Oy и Oz соответственно (рис. 3). Тогда координаты x, y, z точек A_x, A_y и A_z на осях Ox, Oy и Oz

соответственно являются координатами точки A в данной системе координат. Коротко это записывают так: $A(x; y; z)$, где x — абсцисса, y — ордината, z — аппликата точки A.

Координаты точки A можно определить и по-иному. Например, для получения координаты A_x проведем перпендикуляр AA_0 к плоскости Oxy, а потом из точки A_0 проведем перпендикуляр A_0A_x к оси Ox (рис. 3). Тогда по теореме о трех перпендикулярах $AA_x \perp Ox$, то есть полученная таким образом координата A_x совпадает с определенной ранее и является абсциссой точки A (аналогичные рассуждения для ординаты и аппликаты проведите самостоятельно).

Значения координат точки A можно также получить, если провести через эту точку три плоскости, параллельные координатным плоскостям Oyz, Oxz и Oxy (рис. 3). В этом случае точки A_x, A_y и A_z являются точками пересечения проведенных плоскостей с координатными осями (объясните почему).

Итак, в прямоугольной декартовой системе координат каждой точке пространства ставится в соответствие единственная упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$, и наоборот: каждой тройке чисел $(x; y; z)$ соответствует единственная точка пространства.

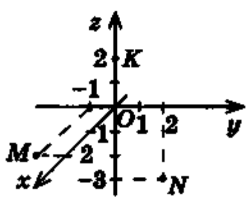


Рис. 4. Точки, имеющие одну или несколько нулевых координат

Очевидно, что если точка принадлежит одной из координатных плоскостей, то некоторая ее координата равна нулю. Так, на рисунке 4 точка M принадлежит плоскости Oxy и имеет координаты $(2; -1; 0)$, а точка N плоскости Oyz — координаты $(0; 2; -3)$. Соответственно точки, принадлежащие координатным осям, имеют две нулевые координаты: например, координаты точки K оси Oz равны $(0; 0; 2)$. Очевидно также, что все три координаты начала координат нулевые: $O(0; 0; 0)$. Условия, при которых та или иная координата точки равна нулю, исследуйте самостоятельно.

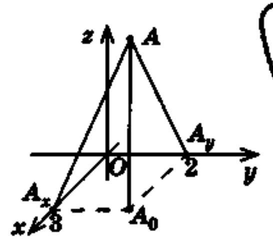


Рис. 5

Задача

Найдите координаты проекций точки $A(3; 2; 4)$ на координатные плоскости.

Решение

Проведем из данной точки перпендикуляр AA_0 к плоскости Oxy и перпендикуляры AA_x

и AA_y к осям Ox и Oy соответственно (рис. 5). Найдем координаты точки A_0.

Так как A_0A_x и A_0A_y — проекции наклонных AA_x и AA_y на плоскость Oxy, то по теореме о трех перпендикулярах $A_0A_x \perp Ox$, $A_0A_y \perp Oy$. Так как по определению координат точки в пространстве координата точки A_x на оси Ox и координата точки A_y на оси Oy равны соответствующим координатам точки A, то $A_x(3;0;0)$, $A_y(0;2;0)$. Отсюда $A_0(3;2;0)$.

Рассуждая аналогично, определяем, что проекции точки A на плоскости Oxz и Oyz имеют координаты $(3;0;4)$ и $(0;2;4)$ соответственно.

Ответ: $(3;2;0)$, $(3;0;4)$, $(0;2;4)$.

1.2. Основные задачи в координатах

Опираясь на соответствующие свойства координат на плоскости, докажем формулы координат середины отрезка и расстояния между точками в пространстве.

Напомним, что в планиметрии каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов. Такое же свойство сохраняется и в стереометрии.

Теорема **(формулы координат середины отрезка в пространстве)**

Координаты середины отрезка вычисляются по формулам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2},$$

где $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ — концы отрезка, $C(x;y;z)$ — середина отрезка.

Доказательство

□ Опустим из точек A, B и C перпендикуляры на плоскость Oxy. Основания этих перпендикуляров — точки $A_0(x_1;y_1;0)$, $B_0(x_2;y_2;0)$ и $C_0(x;y;0)$ соответственно. Рассмотрим случай, когда точки A_0, B_0 и C_0 не совпадают (рис. 6). Так как проведенные к одной плоскости перпендикуляры параллельны и лежат в одной плоскости, а точка C — середина отрезка AB, то по теореме Фалеса точка C_0 является серединой отрезка A_0B_0. По формулам координат середины

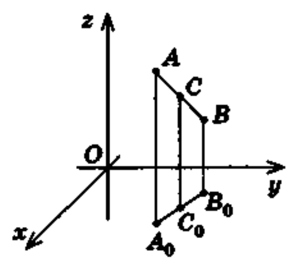


Рис. 6. К доказательству формул координат середины отрезка

отрезка на плоскости имеем: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$. В случае, когда точки A_0 и B_0, а значит, и C_0 совпадают, эти формулы также справедливы (проверьте это самостоятельно).

Аналогично, проведя из данных точек перпендикуляры к плоскости Oxz, получаем $z=\frac{z_1+z_2}{2}$. Теорема доказана. ■

Как известно из курса планиметрии, расстояние между точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ вычисляется по формуле $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. Выведем пространственный аналог этой формулы.

Теорема (формула расстояния между точками в пространстве)
Расстояние между точками $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ вычисляется по формуле

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

Доказательство

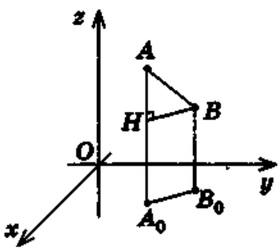


Рис. 7. К доказательству формулы расстояния между точками в пространстве

□ Рассмотрим сначала случай, когда отрезок AB не параллелен плоскости Oxy (рис. 7).

Опустим из точек A и B перпендикуляры AA_0 и BB_0 на плоскость Oxy, $AA_0 \parallel BB_0$. Ясно, что точки A_0 и B_0 имеют координаты $(x_1; y_1; 0)$ и $(x_2; y_2; 0)$ соответственно. По формуле расстояния между точками на плоскости $A_0B_0=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. Плоскость, проходящая через точку B параллельно Oxy, пересекает прямую AA_0 в некоторой точке H, причем $BH=A_0B_0$ как противолежащие стороны образованного параллелограмма.

Более того, $\angle AHB=90^\circ$, поскольку проведенная плоскость параллельна Oxy, а прямая AA_0 перпендикулярна этим плоскостям. Так как $H(x_1;y_1;z_2)$, то $AH=|z_1-z_2|$. Следовательно, из треугольника AHB по теореме Пифагора $AB=\sqrt{BH^2+AH^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

В случае, когда отрезок AB параллелен оси Oz или принадлежит ей, его длина равна $|z_1-z_2|$. Такой же результат дает и только что полученная формула при $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Случай, когда отрезок AB параллелен плоскости Oxy, рассмотрите самостоятельно. ■

Задача

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(-2;1;0)$, $B(4;-3;2)$, $C(6;3;-4)$, $D(0;7;-6)$ является параллелограммом.

Решение

Найдем координаты середин отрезков AC и BD.

Для отрезка AC: $x=\frac{-2+6}{2}=2$, $y=\frac{1+3}{2}=2$, $z=\frac{0+(-4)}{2}=-2$.

Для отрезка BD: $x=\frac{4+0}{2}=2$, $y=\frac{-3+7}{2}=2$, $z=\frac{2+(-6)}{2}=-2$.

Следовательно, отрезки AC и BD имеют общую середину. Это значит, что прямые AC и BD пересекаются, то есть точки A, B, C и D лежат в одной плоскости. Диагонали четырехугольника $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам, таким образом, $ABCD$ — параллелограмм по признаку.

Отметим, что при решении аналогичной задачи в курсе планиметрии мы использовали и другой способ — доказывали попарное равенство противолежащих сторон данного четырехугольника. Но в пространстве этот способ неприемлем, так как из равенств $AB=CD$ и $AD=BC$ не следует, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости. Действительно, четырехугольник $ABCD$ может оказаться пространственным (на рисунке 8 такой четырехугольник получен перегибом параллелограмма $ABCD$ по прямой BD). Очевидно, что в этом случае пространственный четырехугольник $ABCD$ удовлетворяет условиям $AB=CD$ и $AD=BC$, но не является параллелограммом.

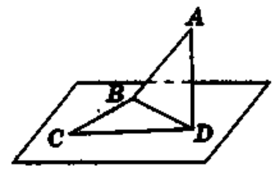


Рис. 8

Второй способ решения этой задачи будет рассмотрен в § 2.

Задача

На оси аппликат найдите точку C, равноудаленную от точек $A(1;0;3)$ и $B(4;3;-1)$.

Решение

Так как искомая точка лежит на оси аппликат, то $C(0;0;z)$. Найдем z, воспользовавшись условием $AC=BC$. Имеем:

$AC^2=(1-0)^2+(0-0)^2+(3-z)^2$, $BC^2=(4-0)^2+(3-0)^2+(-1-z)^2$.

Приравняв эти выражения, получим $1+(z-3)^2=25+(z+1)^2$, откуда $z=-2$. Следовательно, искомая точка $C(0;0;-2)$.

Ответ: $(0;0;-2)$.

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

1.° Даны точки $A(-1;0;4)$, $B(7;0;0)$, $C(0;-3;-2)$, $D(1;7;0)$, $E(0;-5;0)$, $F(0;0;6)$. Определите, какие из данных точек принадлежат:

а) плоскости Oxy; в) оси Oz;
б) плоскости Oyz; г) оси Oy.

2.° Определите расположение относительно прямоугольной декартовой системы координат точки пространства, у которой:

а) ордината равна нулю;
б) аппликата равна нулю;
в) абсцисса и аппликата равны нулю;
г) абсцисса и ордината равны нулю.

3.° Точка C — середина отрезка AB. Назовите:

а) аппликату точки C, если $A(8;-1;m)$, $B(-8;2;-m)$;
б) ординату точки B, если $A(4;m;-2)$, $C(-1;m;0)$;
в) абсциссу точки A, если $B(-m;-1;0)$, $C(0;3;2)$.

4.° Расстояние от точки A до начала координат равно $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Какими могут быть координаты точки A? Назовите несколько вариантов правильного ответа.

МОДЕЛИРУЕМ

5.° По образцу, приведенному на рисунке 4, изобразите в прямоугольной декартовой системе координат точки $A(1;3;2)$, $B(1;-2;-1)$, $C(-3;1;0)$, $D(0;1;-4)$. Какие из данных точек принадлежат координатным плоскостям?

6.* Сконструируйте из плотной бумаги модель куба. Приняв одну из его вершин за начало координат, а ребра, выходящие из этой вершины, за единичные отрезки координатных осей (см. рис. 3), определите координаты остальных вершин куба.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

7.* Дана точка $A(-1;3;4)$. Найдите координаты оснований перпендикуляров, проведенных из данной точки:

а) к координатным плоскостям; б) к осям координат.

8.* Заполните таблицу по образцу:

Расположение точки	Координаты точки
Плоскость Oxy	$(x;y;0)$
Плоскость Oxz	
Плоскость Oyz	
Ось Ox	
Ось Oy	
Ось Oz	

9.* Найдите расстояния от точки $A(6;-8;15)$ до координатных плоскостей.

10 (опорная). ***Координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz попарно перпендикулярны.*** Докажите.

11. Даны точки $A(2;-3;4)$, $B(1;7;4)$, $C(-1;0;4)$. Какая координатная плоскость параллельна плоскости ABC? Ответ обоснуйте.

12. Даны точки $A(-3;0;2)$ и $B(5;0;2)$. Какая координатная ось параллельна прямой AB? Ответ обоснуйте.

13. Найдите координаты середины отрезка AB, если:

а) $A(-6;3;0)$, $B(0;-7;-4)$;

б) $A(8;11;-5)$, $B(-8;11;-1)$;

в) $A(2a;-b;c)$, $B(-4a;5b;-c)$.

14. Отрезок BM — медиана треугольника ABC. Найдите координаты:

а) точки C, если $A(2;-9;0)$, $M(-1;-2;3)$;

б) точки A, если $M(0;-1;4)$, $C(-3;1;0)$.

15. Отрезок AB — диаметр окружности с центром O. Найдите координаты:

а) точки O, если $A(9;-1;2)$, $B(-3;-5;0)$;

б) точки A, если $O(-3;-2;-1)$, $B(-4;0;-1)$.

16. Дан параллелограмм $ABCD$. Найдите координаты вершины D, если $A(-1;-3;-1)$, $B(6;-1;-3)$, $C(0;-6;6)$.

17. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(4;0;-2)$, $B(1;2;3)$, $C(-3;2;6)$, $D(0;0;1)$ является параллелограммом.

18. Найдите расстояние между точками A и B, если:

а) $A(-1;2;0)$, $B(1;3;-2)$;

б) $A(6;-4;1)$, $B(2;-1;1)$;

в) $A(8;2;-6)$, $B(-4;1;6)$.

19. Какая из точек: $A(-2;2;4)$ или $B(0;-3;4)$ — находится ближе к началу координат?

20. Докажите, что треугольник ABC равносторонний, если $A(7;1;-3)$, $B(0;8;-3)$, $C(0;1;4)$.

21. На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точек $M(2;-1;3)$ и $N(1;-2;5)$.

22. Найдите длины ортогональных проекций отрезка CD на координатные плоскости, если $C(0;4;3)$, $D(6;-4;9)$.

23. Расстояние между точками $A(-3;1;x)$ и $B(-5;3;1)$ равно 3. Найдите x.

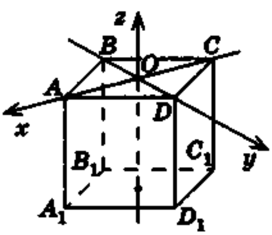


Рис. 9

Уровень Б

24. На рисунке 9 ребро куба равно $2\sqrt{2}$. Определите координаты вершин куба.

25. Даны точки $M(a;-b;c)$ и $N(a;b;c)$, где $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$. Какие координатные плоскости параллельны прямой MN? Какие координатные плоскости перпендикулярны прямой MN?

26. Дана точка $A(-2;-4;3)$. Какое соотношение выполняется для координат точки B, если прямая AB:

а) параллельна плоскости Oyz;

б) перпендикулярна плоскости Oyz?

27. Середина отрезка MN принадлежит оси ординат. Найдите a и b, если:

а) $M(a;-1;-3)$, $N(-2;9;b)$; б) $M(a-b;-3;-4)$, $N(-1;7;a+2b)$.

28. Точка A лежит на оси аппликат, а точка B — в плоскости Oxy. Найдите координаты этих точек, если середина отрезка AB имеет координаты $(-4;3;-1)$.

29. На отрезке AB взята точка M так, что $AM:MB=1:3$. Найдите координаты:

а) точки M, если $A(-7;4;0)$, $B(5;0;-8)$;

б) точки B, если $A(2;-9;6)$, $M(1;-6;4)$.

30. Найдите длину медианы BD треугольника ABC, если $A(-1;-5;3)$, $B(0;2;-5)$, $C(5;-3;5)$.

→ **31.** Докажите, что треугольник с вершинами $A(-2;6;-3)$, $B(2;-2;5)$, $C(0;-4;1)$ прямоугольный, и назовите его гипотенузу.

32. На координатной плоскости Oyz найдите точку, равноудаленную от точек $(0;-2;2)$, $(-2;4;6)$ и $(-4;2;4)$.

33. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(0;1;2)$, $B(2;-4;0)$, $C(-2;-3;-4)$, $D(-4;2;-2)$ является ромбом.

→ **34.** Даны точки $A(1;0;0)$, $B(x;0;2)$, $C(1;2;2)$. При каких значениях x треугольник ABC является равностороиним?

Уровень В

35. Расстояния от точки M до координатных плоскостей Oxy, Oyz и Oxz равны 5, 6 и 7 соответственно. Найдите координаты точки M. Сколько решений имеет задача?

36. Расстояния от точки M до координатных осей равны 16, 19 и 21. Найдите расстояние от данной точки до начала координат.

→ **37.** Длина отрезка, соединяющего точку M с началом координат O, равна 1. Найдите координаты точки M, если прямая OM образует с осями абсцисс и ординат углы, равные 60°. Сколько решений имеет задача?

38. Серединами сторон треугольника являются точки $(1;-3;-3)$, $(6;3;-1)$ и $(2;-1;2)$. Найдите координаты вершин треугольника.

→ **39.** Докажите, что точки $A(2;3;-1)$, $B(0;-3;6)$, $C(6;15;-15)$ лежат на одной прямой. Какая из данных точек лежит между двумя другими?

✱ **40 (опорная).** ***Если точка $C(c_1;c_2;c_3)$ делит отрезок с концами $A(a_1;a_2;a_3)$ и $B(b_1;b_2;b_3)$ в отношении $AC:CB=m:n$, то $c_i=\frac{n}{m+n}a_i+\frac{m}{m+n}b_i$, где $i=1,2,3$.*** Докажите.

41. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Найдите координаты точки D, если $AB=6$, $BC=12$, $A(-6;1;2)$, $C(3;-5;-1)$.

→ **42.** На стороне AC треугольника ABC взята точка D. Найдите ее координаты, если $A(-11;7;2)$, $C(5;-1;-6)$, а площади треугольников ABD и ABC относятся как $7:8$.

43 (опорная). ***Точка пересечения медиан треугольника ABC с вершинами $A(a_1;a_2;a_3)$, $B(b_1;b_2;b_3)$ и $C(c_1;c_2;c_3)$ имеет координаты*** $\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3};\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$. Докажите.

44. Точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите координаты точки A, если $B(3;\ 1;\ 2)$, $C(2;\ 3;\ 1)$, $M(2;\ 2;\ 2)$.

45. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $A(0;-1;1)$, $B(19;21;27)$, $C(-5;-3;15)$.

→ **46.** Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $A(2;-2;5)$, $B(-2;6;-3)$, $C(0;-4;1)$.

47. Даны точки $A(-1;-2;3)$ и $B(2;3;1)$. Найдите на оси аппликат все точки C такие, чтобы треугольник ABC был прямоугольным.

→ **48.** Найдите углы и площадь треугольника с вершинами $(-1;1;3)$, $(3;-1;1)$, $(1;-1;3)$.

Повторение перед изучением § 2

Теоретический материал

- декартовы координаты на плоскости (9 класс)
- геометрические преобразования на плоскости (9 класс)

Задачи

49. На плоскости при повороте вокруг начала координат точка $A(1;\sqrt{3})$ переходит в точку $B(-1;\sqrt{3})$. Определите угол поворота, если он является острым.

50. Постройте треугольник AB_1C, в который переходит равнобедренный треугольник ABC при симметрии относительно прямой, содержащей основание AC. Найдите расстояние BB_1, если $AC=6$ см, а площадь данного треугольника равна 12 см^2.

§ 2. ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Свойства движений в пространстве

Напомним, что ***движением*** на плоскости мы называли геометрическое преобразование, сохраняющее расстояния между точками. Так же определяют движение и в пространстве, причем все свойства движений, известные из курса планиметрии, в стереометрии сохраняются: при движении прямые переходят в прямые, лучи — в лучи, отрезки — в отрезки, и углы между лучами не изменяются.

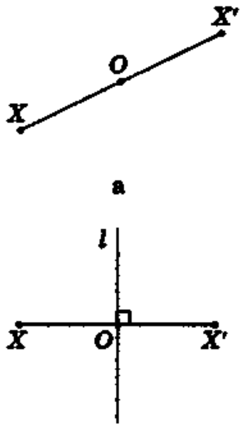
Новым свойством движения в пространстве является то, что ***движение переводит плоскость в плоскость***.

Действительно, пусть точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, при движении переходят в точки A', B' и C', также не лежащие на одной прямой (рис. 10). Покажем, что при этом движении плоскость ABC переходит в плоскость $A'B'C'$. Через произвольную точку X плоскости ABC проведем прямую, пересекающую две стороны треугольника ABC в точках M и N. Очевидно, что при движении эти точки перейдут в точки M' и N', лежащие на соответствующих сторонах треугольника $A'B'C'$. Таким образом, прямая $M'N'$, в которую переходит прямая MN, принадлежит плоскости $A'B'C'$, то есть точка X', в которую переходит точка X, принадлежит прямой $M'N'$, а следовательно, и плоскости $A'B'C'$. Это значит, что произвольная точка плоскости ABC при движении переходит в точку плоскости $A'B'C'$.

Рис. 10. К обоснованию свойства движения в пространстве

Аналогично можно доказать, что каждую точку плоскости $A'B'C'$ можно получить из точки плоскости ABC при рассматриваемом движении. Итак, при движении плоскость ABC переходит в плоскость $A'B'C'$.

Так же как и на плоскости, в пространстве две фигуры называются ***равными***, если они совмещаются движением.



а

б

Рис. 11. Центральная и осевая симметрии

2.2. Симметрия в пространстве

Симметрия как один из видов геометрических преобразований знакома вам из курса планиметрии. Преобразования симметрии относительно точки (центральная симметрия) и относительно прямой (осевая симметрия) в пространстве определяют так же, как и на плоскости:

- точки X и X' называются ***симметричными относительно точки*** O, если точка O — середина отрезка XX' (рис. 11, *а*); точка O называется ***центром симметрии***;
- точки X и X' называются ***симметричными относительно прямой*** l, если эта прямая перпендикулярна отрезку XX' и проходит через его середину (рис. 11, *б*); прямая l называется ***осью симметрии***.

Рассмотрим еще один вид симметрии в пространстве. Пусть α — фиксированная плоскость, X — произвольная точка вне ее. Проведем перпендикуляр XO к плоскости α и на луче XO отложим отрезок OX', равный XO, но лежащий в другом полупространстве относительно плоскости α (рис. 12). Мы получили точку X', симметричную точке X относительно плоскости α.

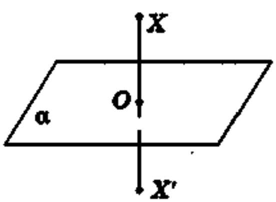


Рис. 12. Точки X и X' симметричны относительно плоскости α

Определение

Точки X и X' называются **симметричными относительно плоскости** α, если эта плоскость перпендикулярна отрезку XX' и проходит через его середину. Точки плоскости α считаются симметричными сами себе.

При этом плоскость α называется ***плоскостью симметрии***.

Очевидно, что точкой, симметричной точке X' относительно плоскости α, является точка X.

Определение

Преобразованием симметрии (симметрией) относительно плоскости α называется такое преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка X фигуры F переходит в точку X' фигуры F', симметричную X относительно плоскости α.

При этом фигуры F и F' называются симметричными относительно плоскости α (рис. 13).

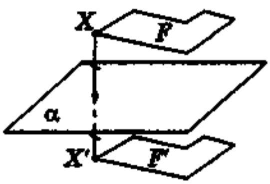


Рис. 13. Фигуры F и F' симметричны относительно плоскости α

Наглядно представить симметрию относительно плоскости можно с помощью плоского зеркала. Любой объект и его изображение симметричны относительно плоскости зеркала (рис. 14). Поэтому симметрию относительно плоскости иначе называют ***зеркальной симметрией***.

Рис. 14. Художник Ф. Будкин. Перед зеркалом

Если преобразование симметрии относительно плоскости α переводит фигуру F в себя, то такая фигура называется ***симметричной относительно плоскости*** α, а сама плоскость α — ***плоскостью симметрии фигуры*** F. Например, плоскостью симметрии прямой является любая перпендикулярная ей плоскость (рис. 15).

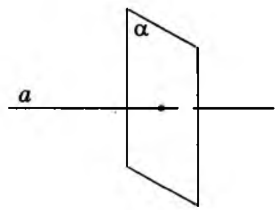


Рис. 15. Плоскость симметрии прямой

Центры, оси и плоскости симметрии фигуры, если они у нее есть, называются ***элементами симметрии*** этой фигуры.

Несложно доказать, что точки, симметричные точке $A(x; y; z)$ относительно координатных плоскостей, осей и начала координат, имеют следующие координаты:

Элемент симметрии	Координаты симметричной точки
Плоскость Oxy	$(x; y; -z)$
Плоскость Oxz	$(x; -y; z)$
Плоскость Oyz	$(-x; y; z)$
Ось Ox	$(x; -y; -z)$
Ось Oy	$(-x; y; -z)$
Ось Oz	$(-x; -y; z)$
Точка O	$(-x; -y; -z)$

Теорема (основное свойство зеркальной симметрии)
Зеркальная симметрия является движением.

Доказательство

□ Пусть точки A и B при симметрии относительно плоскости α переходят в точки A' и B' соответственно. Введем систему координат так, чтобы плоскость Oxy совпала с α (рис. 16).

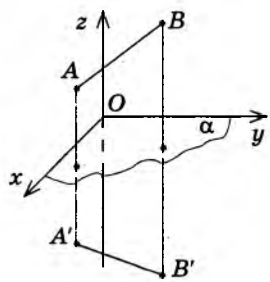


Рис. 16. К доказательству основного свойства зеркальной симметрии

Так как точки, симметричные относительно плоскости Oxy, имеют одинаковые абсциссы и ординаты, но противоположные аппликаты, то для точек $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ получим $A'(x_1;y_1;-z_1)$, $B'(x_2;y_2;-z_2)$. Тогда по формуле расстояния между точками находим:

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},$$

$$A'B'=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(-z_1-(-z_2))^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

Таким образом, $AB=A'B'$. Значит, зеркальная симметрия сохраняет расстояния между точками, то есть является движением. Теорема доказана. ∎

Из доказанной теоремы следует, что зеркальная симметрия обладает всеми свойствами движения.

Задача

Докажите, что если две прямые* зеркально симметричны, то они лежат в одной плоскости.

Решение

Рассмотрим произвольные точки A и B прямой a, которые при зеркальной симметрии относительно плоскости α переходят в точки A' и B' прямой a'. По определению симметрии относительно плоскости $AA'\perp\alpha$, $BB'\perp\alpha$, следовательно, $AA'\parallel BB'$. Очевидно, что точки A, A', B и B' лежат в плоскости этих параллельных прямых, то есть прямые a и a' также лежат в этой плоскости.

Самые разнообразные виды пространственной симметрии мы наблюдаем в живой и неживой природе, искусстве, технике и т. д. В основе строения живых форм лежит принцип симметрии, причем природа гармонично объединяет различные виды симметрий с почти математической строгостью (рис. 17).

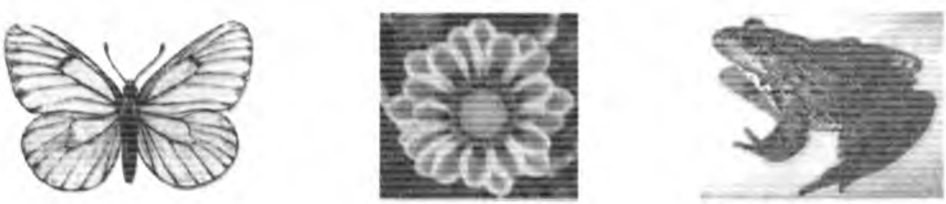


Рис. 17. Симметричные формы в природе

* Напомним: говоря «две точки», «две прямые», «две плоскости», мы считаем, что данные точки (прямые, плоскости) не совпадают.

Совершенную симметричную форму имеют природные многогранники — кристаллы (подробнее рассмотрим их в § 12). Физики утверждают, что симметрия является фундаментальным свойством природы, с которым связаны законы сохранения энергии и импульса, строение атомов и молекул, а также особенности природных явлений.

Невозможно переоценить значение симметрии в искусстве. В древнегреческой архитектуре симметрия была воплощением законов целесообразности и гармонии (рис. 18). Идеи зеркальной симметрии широко отражены в живописи Средневековья.

Рис. 18. Храм Артемиды в Эфесе

В литературных произведениях существует симметрия образов, ситуаций, мышления. Вспомним хотя бы «закон мести» в греческой трагедии: виновник преступления в конце концов сам становится жертвой такого же преступления.

Рис. 19. Добчинский и Бобчинский. Рисунок художника Д. Кардовского

Яркими примерами симметрии образов являются персонажи комедии Н. В. Гоголя «Ревизор» Добчинский и Бобчинский — сам автор отмечает, что они чрезвычайно похожи друг на друга (рис. 19). Симметричными можно считать и литературные образы героев-антиподов, противостояние между которыми составляет основной конфликт литературного произведения: Шерлок Холмс и профессор Мориарти у А. Конана Дойля, доктор Джекил и мистер Хайд у Р. Л. Стивенсона и т. д.

В музыке построение отдельных мелодичных форм также подчиняется законам симметрии. Прослушайте «Рондо-каприччио» великого Бетховена — композитор использует основную тему как своеобразную плоскость симметрии, от которой как бы отражаются отдельные эпизоды и вариации. Симметрия в музыке наглядно проявляется даже через нотную запись (рис. 20).

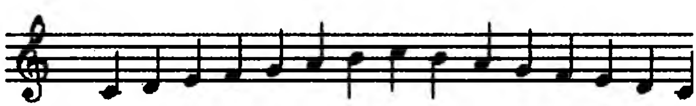


Рис. 20. Гамма до мажор

Неисчерпаемые возможности симметрии и то широкое применение, которое она получила в разных областях человеческой деятельности, подтверждают универсальность геометрических знаний и значимость геометрии в общечеловеческой культуре.

2.3*. Поворот в пространстве

Напомним, что на плоскости мы выполняли поворот фигуры вокруг данной точки O в заданном направлении на данный угол. Но в пространстве такое описание поворота не является однозначным: действительно, через фиксированную точку O проходит бесконечно много плоскостей, и в каждой из них поворот фигуры вокруг точки O на данный угол приведет к различным результатам.

Между тем, открывая дверь или переворачивая страницу книги, мы поворачиваем все точки фигуры в одном направлении на определенный угол, причем все точки некоторой прямой остаются неподвижными. Попробуем на основании этих наглядных примеров приблизиться к строгому определению поворота в пространстве.

Для этого рассмотрим фиксированную прямую l и произвольную точку X (рис. 21). Проведем через точку X плоскость α, перпендикулярную l, и обозначим точку O пересечения плоскости α с прямой l. В плоскости α выполним поворот точки X вокруг точки O на угол φ, т. е. построим точку X' так, чтобы $X' \in \alpha$, $OX' = OX$ и $\angle XOX' = \varphi$. Такой переход точки X в точку X' называется ***поворотом*** вокруг прямой l на угол φ.

Напомним, что на плоскости мы характеризовали поворот и направлением — по часовой стрелке или против часовой стрелки. В пространстве направление поворота на плоскости α зависит от выбора стороны, с которой мы смотрим на эту плоскость (об этом, в частности, речь будет идти в п. 2.5). Поэтому договоримся считать прямую, вокруг которой выполняется поворот, ***ориентированной***

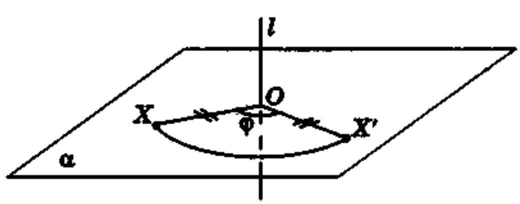


Рис. 21. Поворот точки X вокруг прямой l на угол φ

* Здесь и далее звездочкой «*» обозначен материал, изучение которого не является обязательным.

(т. е. осью с заданным направлением) и рассматривать поворот по часовой стрелке или против часовой стрелки, если смотреть на плоскость с положительного направления этой оси. Например, на рисунке 22 показано направление поворота точек плоскости α вокруг оси l против часовой стрелки.

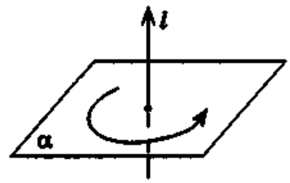


Рис. 22. Поворот против часовой стрелки вокруг оси l

Определение

Поворотом фигуры F вокруг ориентированной прямой l на угол φ называется преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка X фигуры F $(X \notin l)$ переходит в точку X' фигуры F' так, что $(XOX') \perp l$, $OX' = OX$ и $\angle XOX' = \varphi$, где O — точка пересечения плоскости, проходящей через точку X перпендикулярно прямой l, с прямой l.

Все углы измеряются по часовой стрелке (или все — против часовой стрелки), точки прямой l при повороте переходят сами в себя.

Иначе говоря, при повороте вокруг ориентированной прямой l каждая точка фигуры F смещается в заданном направлении на данный угол по дуге окружности, плоскость которой перпендикулярна прямой l, центр принадлежит этой прямой, а радиус равен расстоянию от данной точки фигуры F до прямой l. На рисунке 23 фигура F переходит в фигуру F' при повороте вокруг оси l на угол φ против часовой стрелки.

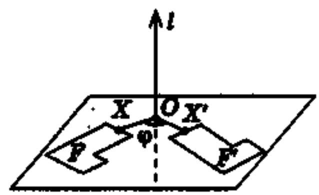


Рис. 23. Поворот фигуры F вокруг оси l

Прямую l называют *осью поворота* (или осью вращения), а угол φ — *углом поворота*.

Теорема

(основное свойство поворота в пространстве)

Поворот вокруг прямой является движением.

Доказательство

□ Пусть при повороте вокруг оси l на угол φ $(0° < \varphi < 180°)$ точки A и B переходят в точки A' и B' соответственно. Докажем, что $AB = A'B'$.

Рассмотрим общий случай, когда прямые AB и l скрещиваются и не являются перпендикулярными. Проведем через точки A и B

плоскости α и β, перпендикулярные прямой l и пересекающие ее в точках O_1 и O_2 соответственно (рис. 24).

Опустим из точки A перпендикуляр AC на плоскость β. Рассмотрим в плоскости α поворот вокруг точки O_1, а в плоскости β — поворот вокруг точки O_2 на угол φ. При таких поворотах точки A и B переходят в точки A' и B'. Опустим из точки A' перпендикуляр $A'C'$ на плоскость β.

Очевидно, что плоскости α и β, перпендикулярные прямой l, параллельны. Отрезки AC, O_1O_2, $A'C'$ перпендикулярны этим плоскостям, параллельны и равны. Следовательно, четырехугольники ACO_2O_1, $A'C'O_2O_1$, $ACC'A'$ являются прямоугольниками, откуда следует равенство треугольников AO_1A' и CO_2C' по трем сторонам. Это значит, что углы AO_1A' и CO_2C' являются равными и равны углу φ. Поэтому при повороте в плоскости β на угол φ вокруг точки O_2 точка C переходит в C'. По свойству поворота на плоскости получаем, что $BC = B'C'$.

Прямоугольные треугольники ABC и $A'B'C'$ равны по двум катетам ($\angle ACB = \angle A'C'B' = 90°$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$), откуда $AB = A'B'$, что и требовалось доказать. ■

Другие случаи взаимного расположения прямых AB и l, а также доказательство для случая $\varphi > 180°$ рассмотрите самостоятельно.

Если при повороте вокруг некоторой прямой l фигура F переходит в себя, то говорят, что эта фигура имеет ***поворотную симметрию*** (или ***симметрию вращения***). Примеры пространственных фигур, обладающих поворотной симметрией, будут рассмотрены дальше.

Заметим также, что поворот вокруг прямой l на 180° является осевой симметрией относительно прямой l (докажите это самостоятельно).

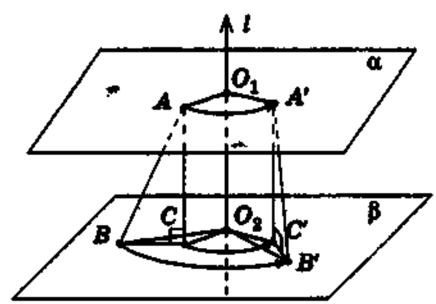


Рис. 24. К доказательству основного свойства поворота в пространстве

2.4. Параллельный перенос в пространстве

Параллельный перенос в пространстве является разновидностью параллельного проектирования для случая, когда плоскость проектируемой фигуры параллельна плоскости проекции (или совпадает с ней).

Напомним, что сонаправленными лучами мы называли:

1) два луча одной прямой, один из которых является частью другого (например, лучи AC и BC на рис. 25, *а*);

2) два параллельных луча, лежащих в плоскости по одну сторону от прямой, проходящей через их начальные точки (например, лучи AB и CD на рис. 25, *б*).

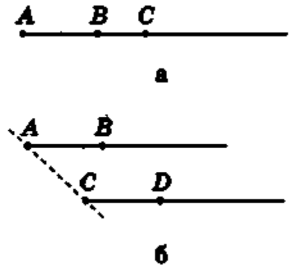


Рис. 25. Сонаправленные лучи

Определение параллельного переноса в стереометрии ничем не отличается от планиметрического. ***Параллельным переносом*** фигуры F в направлении луча OA на расстояние* a называется преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка X фигуры F переходит в точку X' фигуры F' так, что лучи XX' и OA сонаправлены и $XX' = a$ (рис. 26).

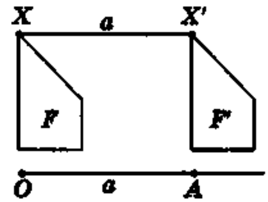


Рис. 26. Параллельный перенос фигуры F в направлении луча OA на расстояние a

Теорема (основное свойство параллельного переноса в пространстве)

Параллельный перенос в пространстве является движением.

Доказательство

□ Пусть при параллельном переносе точки A и B переходят в точки A' и B' соответственно. Покажем, что $AB = A'B'$ Если точки A, B, A' и B' не лежат на одной прямой (рис. 27, *а*), то отрезки AA' и BB' параллельны и равны. Отсюда $AA'B'B$ — параллелограмм, то есть $AB = A'B'$ как противолежащие стороны параллелограмма. В случае, когда точки A, B, A' и B' лежат на одной прямой (рис. 27, *б*), получаем: $A'B' = |AB' - AA'| = |AB' - BB'| = AB$. ■

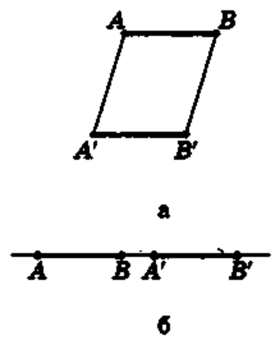


Рис. 27. К доказательству основного свойства параллельного переноса

* В дальнейшем, изучая векторы в пространстве, мы будем рассматривать параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{OA}$.

Убедитесь самостоятельно в том, что рассмотренное доказательство справедливо и для других случаев расположения точек A, B, A' и B' на одной прямой.

Следствие 1

Параллельный перенос переводит прямую в параллельную прямую (или в себя), отрезок — в равный ему отрезок, угол — в равный ему угол.

Следствие 2

Параллельный перенос переводит плоскость в параллельную плоскость (или в себя).

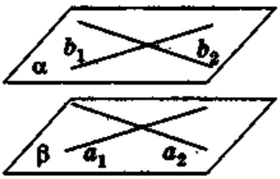


Рис. 28

Действительно, поскольку параллельный перенос является движением, то он переводит произвольную плоскость α в плоскость β. Если эти плоскости не совпадают (рис. 28), то произвольные прямые a_1 и a_2 плоскости α переходят в параллельные им прямые b_1 и b_2 соответственно, и по признаку параллельности плоскостей $\alpha \parallel \beta$.

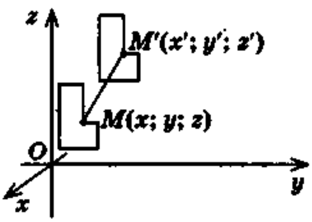


Рис. 29. Параллельный перенос в прямоугольной системе координат в пространстве

Так же как и на плоскости, в пространстве при условии введения системы координат (рис. 29) параллельный перенос, который переводит точку $M(x;y;z)$ в точку $M'(x';y';z')$, можно задать формулами:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c,$$

где a, b и c — некоторые числа, одни и те же для всех точек пространства (доказательство этого факта в стереометрии аналогично планиметрическому). В качестве примера применения формул параллельного переноса рассмотрим другой способ решения задачи п. 1.2.

Задача

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(-2;1;0)$, $B(4;-3;2)$, $C(6;3;-4)$, $D(0;7;-6)$ является параллелограммом.

Решение

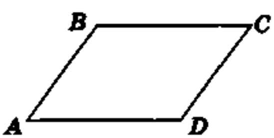


Рис. 30

Покажем, что параллельный перенос, который переводит точку B в точку C, переводит точку A в точку D (рис. 30). Сначала найдем формулы этого переноса. Подставив в общие формулы параллельного переноса координаты точек B и C, получим уравнения, из которых определим a, b и c: $6=4+a$; $3=-3+b$; $-4=2+c$. Отсюда $a=2$; $b=6$; $c=-6$.

Следовательно, искомый перенос задается формулами $x'=x+2$, $y'=y+6$, $z'=z-6$.

Подставив в эти формулы координаты точек A и D, получим правильные равенства: $0=-2+2$, $7=1+6$, $-6=0-6$.

Так как по условию $ABCD$ — четырехугольник, его вершины не лежат на одной прямой. Следовательно, по свойству параллельного переноса в четырехугольнике $ABCD$ две стороны параллельны и равны, то есть $ABCD$ — параллелограмм.

2.5*. Об ориентации поверхности. Лента Мебиуса

При рассмотрении преобразования поворота было отмечено, что направление поворота в данной плоскости фактически зависит от выбора стороны, с которой мы смотрим на плоскость. Такой выбор стороны называется ***ориентацией плоскости***.

Аналогично можно определить понятие ориентации и для других двусторонних поверхностей в пространстве (поверхности куба, цилиндра, шара и др.). Представим себе, что мы закрасили одну из сторон рассматриваемой поверхности — очевидно, что другая ее сторона останется незакрашенной.

Но эта «очевидность» только кажущаяся, так как существуют поверхности, которые невозможно ориентировать. Самой простой из них является так называемая ***лента Мебиуса*** (рис. 31), открытая в 1858 году немецким астрономом и математиком Августом Мебиусом. Изготовить ее модель очень просто: для этого бумажную ленту, имеющую форму прямоугольника $ABCD$ (рис. 32, *а*), нужно склеить так, чтобы вершина A совместилась с вершиной C, а вершина B — с вершиной D (рис. 32, *б*).

Удивительно, но лента Мебиуса является односторонней поверхностью. Чтобы убедиться в этом, попробуйте начать закрашивать ленту с любого места, постепенно перемещаясь по ее поверхности, —

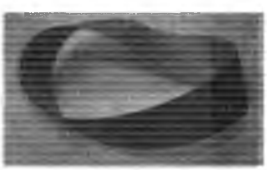
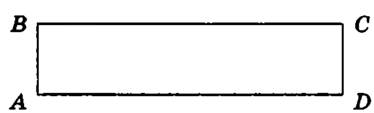
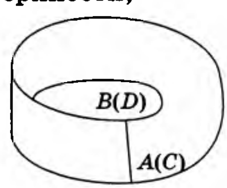


Рис. 31. Лента Мебиуса



а



б

Рис. 32

Рис. 33. М. Эшер. Лента Мебиуса

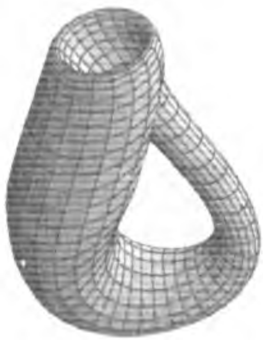


Рис. 34. Бутылка Клейна

Топология – от греческого «топос» – место и «логос» – слово, учение.

в результате вся поверхность окажется закрашенной. Значит, муравьям, которые ползут по ленте Мебиуса на гравюре М. Эшера (рис. 33), не нужно переползать через край ленты, чтобы попасть на ее «противоположную сторону».

Еще одно интересное свойство ленты Мебиуса заключается в том, что она имеет только один край. Действительно, если выбрать в любом месте края ленты точку и начать от нее двигаться вдоль края, со временем мы вернемся в ту же исходную точку, причем все точки края будут пройдены (проверьте это самостоятельно).

И наконец, предлагаем вам еще один эксперимент: проведите на ленте Мебиуса среднюю линию (т. е. отрезок, который соединяет середины противолежащих сторон AB и CD прямоугольника, из которого была склеена лента) и попробуйте разрезать по ней ленту. Оказывается, что вместо двух отдельных частей получается дважды перекрученная лента Мебиуса. Невероятно, но это так!

Лента Мебиуса стала первым примером неориентированной поверхности. Позднее были открыты и другие — например, так называемая бутылка Клейна (рис. 34).

Свойство односторонности ленты Мебиуса нашло довольно широкое техническое применение. В XX веке такую ленту использовали для записи звука на непрерывную магнитную пленку, а также как красящую ленту в первых (матричных) принтерах. Ременные передачи или ленты конвейера, имеющие форму ленты Мебиуса, применяют и сегодня, ведь такие ленты служат вдвое дольше, чем обычные, так как изнашиваются вдвое медленнее (объясните почему). В современной математике существует специальный раздел «топология», в котором рассматриваются, в частности, формы и ориентация поверхностей. А в мировой культуре лента Мебиуса остается символом удивительных открытий, которые до сих пор скрывает геометрия.

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

51.* Могут ли два неравных отрезка совмещаться движением? Могут ли острый и тупой углы совмещаться движением?

52. Два отрезка симметричны относительно плоскости α. Лежат ли данные отрезки в одной плоскости? Совпадает ли эта плоскость с плоскостью α?

53. Имеет ли плоскость симметрии отрезок; прямая; двугранный угол?

54. Среди данных пространственных фигур (рис. 35) назовите те, которые имеют:

а) центр симметрии; в) плоскость симметрии.
б) ось симметрии;

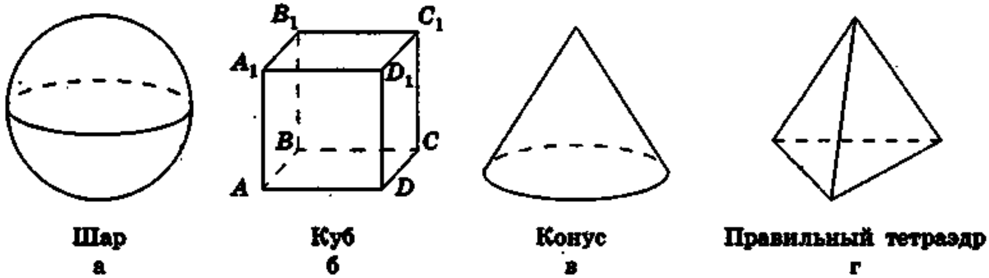


Рис. 35

55. Дан параллелограмм, не являющийся ни прямоугольником, ни ромбом. Имеет ли он ось симметрии на содержащей его плоскости; в пространстве?

56. Совпадают ли множества осей симметрии окружности на плоскости данной окружности и в пространстве?

57. В кубе закрасили две грани. Всегда ли существует поворот, при котором куб переходит в себя, а одна из закрашенных граней — в другую? В случае утвердительного ответа опишите такой поворот.

58.* Существует ли параллельный перенос, который переводит:

а) одну из двух параллельных прямых в другую;

б) одну из двух скрещивающихся прямых в другую;

в) одно из двух оснований цилиндра в другое;

г) одну из двух граней пирамиды в другую?

59. Ребро AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 35, *б*) при параллельном переносе переходит в ребро DD_1. Определите, в какую фигуру при таком переносе переходит:

а) вершина B; б) отрезок B_1A; в) треугольник A_1BB_1.

60. В какую перчатку (правую или левую) переходит правая перчатка при центральной симметрии; осевой симметрии; зеркальной симметрии; параллельном переносе?

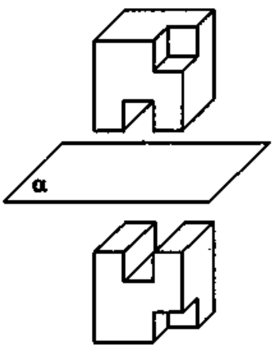


Рис. 36

МОДЕЛИРУЕМ

61.* Вырежьте из пенопласта две фигуры, симметричные относительно плоскости α (рис. 36). Можно ли в механизме, который имеет такие детали, заменить одну из них симметричной?

→ **62.*** Сконструируйте фигуру, которая состоит из куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и фигуры, полученной из данного куба при параллельном переносе в направлении луча AD_1 на расстояние, равное половине отрезка AD_1.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

63.* В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали основания $ABCD$ пересекаются в точке O. Определите:

а) точку, симметричную точке B относительно плоскости ACC_1;

б) прямую, симметричную прямой AB относительно точки O;

в) плоскость, симметричную плоскости BCC_1 относительно точки O;

г) прямую, симметричную прямой CC_1 относительно плоскости BDD_1;

д) плоскость, симметричную плоскости ADD_1 относительно прямой B_1D_1.

→ **64.*** Нарисуйте изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте фигуру, симметричную данному кубу относительно:

а) точки C_1; б) прямой BD; в) плоскости A_1AD.

65.* Даны точки $A(4;2;-1)$, $B(-3;5;2)$, $C(7;-1;-6)$. Назовите координаты точек, симметричных данным точкам относительно:

а) начала координат; б) плоскости Oyz; в) оси аппликат.

66. Точки A и B симметричны относительно плоскости Oxz. Найдите координаты точки B и длину отрезка AB, если $A(-4;-1;2)$.

→ **67.** Найдите координаты точек, симметричных точке $M(5;-12;7)$ относительно:

а) точки $N(-1;0;2)$; б) плоскости Oxz; в) оси абсцисс.

68. Точки A и B симметричны относительно точки M. Найдите координаты:

а) точки M, если $A(-11;8;3)$, $B(-5;2;-1)$;

б) точки B, если $A(2;1;-3)$, а точка M лежит на положительной полуоси аппликат и удалена от начала координат на 1.

→ **69.** Точки $A(0;-2;1)$ и $B(4;0;5)$ симметричны относительно точки C. Найдите координаты точки, симметричной точке C относительно точки A.

70. Нарисуйте изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте фигуру, в которую переходит данный куб при повороте:

а) вокруг прямой AA_1 на $90°$ (рассмотрите два случая);

б) вокруг прямой BC на $180°$.

71. Плоскости α и β параллельны. При повороте на $60°$ вокруг прямой, принадлежащей плоскости α, плоскость α переходит в плоскость α'. Найдите угол между плоскостями α' и β.

→ **72.** Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c. При повороте вокруг прямой c на $25°$ плоскость α переходит в плоскость α'. Найдите угол между плоскостями α' и β.

73. Нарисуйте изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте фигуру, в которую переходит данный куб при параллельном переносе, если этот параллельный перенос переводит:

а) вершину C в вершину B; б) вершину A в вершину C_1.

74. Параллельный перенос задан формулами $x'=x-1$, $y'=y+4$, $z'=z-2$. Найдите координаты точки:

а) в которую переходит точка $A(8;1;0)$;

б) которая переходит в точку $B(-1;-2;-3)$.

→ **75.** Существует ли параллельный перенос, при котором точка $M(0;-1;6)$ переходит в точку $M'(-1;1;4)$, а точка $N(1;-2;-2)$ — в начало координат?

76. При параллельном переносе в направлении луча AB плоскость α переходит в себя. Докажите, что прямая AB и плоскость α не пересекаются.

→ 77. Прямая a и плоскость α перпендикулярны. При параллельном переносе прямая a переходит в прямую a'. Докажите, что $a' \perp \alpha$.

Уровень Б

78. Нарисуйте изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте фигуру, в которую переходит данный куб при симметрии относительно:
а) середины ребра C_1D_1; б) прямой AC.

79. Даны точки $A(0;-2;3)$ и $B(8;0;-1)$. Найдите точку, симметричную середине отрезка AB относительно:
а) точки $(-1;2;3)$; б) плоскости Oxz; в) оси абсцисс.

→ 80. Точка $M(3;1;5)$ принадлежит окружности с центром O. Найдите радиус окружности, если при симметрии относительно оси аппликат центр окружности переходит в точку $O'(-5;1;4)$.

81. Даны плоскости α и β. Верно ли, что всегда существует плоскость γ, относительно которой данные плоскости симметричны? Если да, то как построить плоскость γ?

→ 82. При симметрии относительно плоскости α плоскость β переходит в плоскость β'. Докажите, что:
а) если $\beta \parallel \alpha$, то $\beta' \parallel \alpha$; б) если $\alpha \perp \beta$, то β' совпадает с β.

83. В тетраэдре $PABC$ все ребра равны. Назовите наименьший угол поворота вокруг прямой PO, перпендикулярной плоскости ABC, при котором тетраэдр переходит в себя. Изменится ли ответ, если $PA = PB = PC = a$, $AB = BC = AC = b$, $a \neq b$?

84. Плоскости α, β и γ имеют общую прямую c. При повороте вокруг этой прямой на $70°$ плоскость α переходит в плоскость β, а плоскость β — в плоскость γ. Найдите угол между плоскостями α и γ.

→ 85. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. При повороте вокруг прямой l на $220°$ плоскость α переходит в плоскость α', симметричную α относительно плоскости β. Найдите угол между плоскостями α и β.

86. Три вершины параллелограмма $ABCD$ имеют координаты $A(0;-1;9)$, $B(3;8;4)$, $C(2;9;1)$. При параллельном переносе вершина D переходит в точку $(2;2;5)$. В какую точку переходит центр симметрии параллелограмма?

87. Дан параллелограмм $ABCD$. С помощью геометрических преобразований найдите координаты:

а) вершины A, если $B(-1;2;0)$, $C(3;4;1)$, $D(2;-2;4)$;

б) вершин C и D, если $A(-5;1;3)$, $B(0;-4;1)$, а точка $O(-3;0;2)$ — точка пересечения диагоналей.

Уровень В

88. Существует ли движение, при котором совмещаются две скрещивающиеся прямые? Приведите пример.

89. Все ребра тетраэдра $PABC$ равны. Точки E и F — середины ребер PA и BC соответственно. Докажите, что прямая EF — ось симметрии тетраэдра.

90. В прямоугольной системе координат точку M подвергли симметрии относительно плоскости Oxy, полученную точку — симметрии относительно начала координат, а полученную после этого точку — симметрии относительно плоскости Oxz. Докажите, что точка M', полученная в результате этих трех преобразований, симметрична точке M относительно плоскости Oyz.

91. Точка $A(1;2;3)$ при повороте вокруг оси аппликат на $90°$ против часовой стрелки переходит в точку A'. Найдите координаты точки A'.

92. В каком направлении и на какое расстояние следует выполнить параллельный перенос куба, чтобы общей частью данного куба и куба, полученного при переносе, также был куб? Сделайте рисунок.

Повторение перед изучением § 3

Теоретический материал

- подобие треугольников (8 класс)
- преобразование подобия на плоскости (9 класс)

Задачи

93. На плоскости при гомотетии с центром $O(-1;2)$ точка $A(3;5)$ переходит в точку $A'(7;8)$, а точка B — в точку B'. Найдите длину отрезка OB', если $BB'=4$ см.

94. Найдите площадь прямоугольного треугольника с наименьшей высотой 12 см, если он подобен треугольнику с катетами 6 см и 8 см.

§ 3. ПОДОБИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

3.1. Преобразование подобия в пространстве

Так же как и на плоскости, преобразование фигуры F в пространстве называется ***преобразованием подобия***, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одном и том же отношении. Это значит, что если две произвольные точки X и Y фигуры F при преобразовании подобия переходят в точки X' и Y' фигуры F', то $X'Y' = kXY$, где k — коэффициент подобия ($k > 0$).

Преобразование подобия в пространстве переводит прямые в прямые, лучи — в лучи, отрезки — в отрезки, а также сохраняет углы между лучами (доказательство этих свойств в стереометрии не отличается от планиметрического). Новым свойством подобия в пространстве является то, что ***преобразование подобия переводит плоскости в плоскости*** (докажите это утверждение самостоятельно, аналогично соответствующему обоснованию для движения в п. 2.1).

Две фигуры в пространстве называются ***подобными***, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия.

Напомним некоторые свойства подобия.

1) Любая фигура подобна сама себе: $F \backsim F$ (*рефлексивность подобия*).

2) Если $F_1 \backsim F_2$, то $F_2 \backsim F_1$ (*симметричность подобия*).

3) Если $F_1 \backsim F_2$, а $F_2 \backsim F_3$, то $F_1 \backsim F_3$ (*транзитивность подобия*).

4) Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия: если $F_1 \backsim F_2$ с коэффициентом k, то $\frac{S_{F_2}}{S_{F_1}} = k^2$.

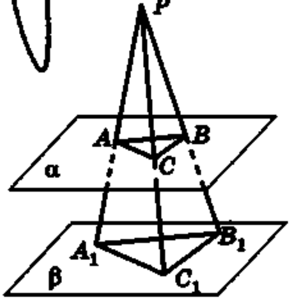


Рис. 37

Задача

Через точку P проведены три луча, не принадлежащие одной плоскости и пересекающие параллельные плоскости α и β в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 соответственно (рис. 37). Докажите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Решение

Согласно свойству параллельных плоскостей плоскость PAB пересекает плоскости α и β по параллельным прямым AB и A_1B_1. Отсюда треугольники PAB и PA_1B_1 подобны по двум углам, следовательно, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{PA}{PA_1}=\frac{PB}{PB_1}=k$. Аналогично доказываем подобие треугольников PAC и PA_1C_1, PBC и PB_1C_1. Так как эти пары треугольников имеют с треугольниками PAB и PA_1B_1 общие стороны, то коэффициенты подобия также равны k. Следовательно, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k$, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по трем сторонам.

3.2. Гомотетия в пространстве

Напомним, что ***гомотетией*** с центром в точке O и коэффициентом* $k>0$ называется такое преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка X фигуры F переходит в точку X' фигуры F', лежащую на луче OX, и $OX'=kOX$.

Гомотетия является преобразованием подобия (доказательство этого факта в стереометрии аналогично планиметрическому).

Докажем еще одно свойство гомотетии в пространстве.

Теорема (свойство гомотетии в пространстве)

Гомотетия переводит плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость или в себя.

Доказательство

□ Пусть α — данная плоскость, точка O — центр гомотетии. Рассмотрим случай, когда коэффициент гомотетии k не равен единице (рис. 38).

Данная гомотетия переводит любые точки A и B плоскости α в точки A' и B' соответственно, причем $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=k$. Тогда треугольники AOB и $A'OB'$ подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Из подобия

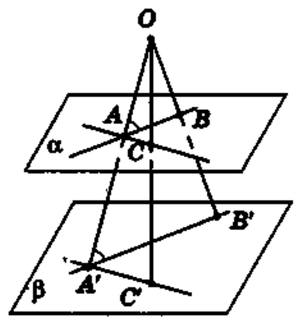


Рис. 38. К доказательству свойства гомотетии в пространстве

* В школьном курсе рассматривается только гомотетия с положительным коэффициентом.

этих треугольников следует равенство соответствующих углов OAB и $OA'B'$, а следовательно, параллельность прямых AB и $A'B'$.

Аналогично, рассматривая в плоскости α прямую AC, пересекающуюся с AB, можно доказать, что при гомотетии она переходит в параллельную прямую $A'C'$. Следовательно, при данной гомотетии плоскость α переходит в плоскость α', содержащую точки A', B' и C'. Так как $A'B' \parallel AB$ и $A'C' \parallel AC$, а плоскости α и α' не совпадают, то по признаку параллельности плоскостей $\alpha' \parallel \alpha$.

Очевидно, что в случае $k=1$ плоскость α при гомотетии переходит в себя. Теорема доказана. ■

Ясно, что плоскость, проходящая через центр гомотетии, при этом преобразовании также переходит в себя.

Обратим внимание и на такой интересный факт (даем его без доказательства): если две фигуры подобны, то одну из них можно получить из другой путем последовательного применения гомотетии и движения.

Задача

При гомотетии с центром $O(2;-3;1)$ треугольник ABC переходит в треугольник $A'B'C'$. Найдите координаты точек B' и C', если $A(6;-1;5)$, $A'(4;-2;3)$, $B(0;1;7)$, $C(-4;-5;-7)$.

Решение

Найдем длины отрезков OA и OA':

$$OA=\sqrt{(2-6)^2+(-3-(-1))^2+(1-5)^2}=6,$$

$$OA'=\sqrt{(2-4)^2+(-3-(-2))^2+(1-3)^2}=3.$$

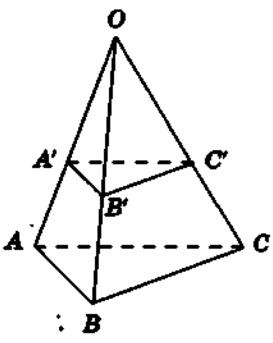


Рис. 39

Так как по определению гомотетии $OA'=kOA$, то $k=\frac{1}{2}$. Следовательно, точки A', B' и C' — середины отрезков OA, OB и OC соответственно (рис. 39).

По формулам координат середины отрезка получаем:

$$x_{B'}=\frac{2+0}{2}=1,\ y_{B'}=\frac{-3+1}{2}=-1,\ z_{B'}=\frac{1+7}{2}=4;$$

$$x_{C'}=\frac{2-4}{2}=-1,\ y_{C'}=\frac{-3-5}{2}=-4,\ z_{C'}=\frac{1-7}{2}=-3.$$

Следовательно, $B'(1;-1;4)$, $C'(-1;-4-3)$.

Ответ: $B'(1;-1;4)$, $C'(-1;-4-3)$.

Подобие пространственных фигур находит широкое применение на практике. Например, архитекторы и строители, проектируя размещение новых зданий и сооружений на местности, предлагают заказчикам макеты строящихся объектов (рис. 40).

Рис. 40. Макет спорткомплекса «Металлист Сити», г. Харьков

3. Логическое отношение эквивалентности

Как мы уже отмечали, отношение подобия на множестве геометрических фигур является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Эти три свойства присущи и некоторым другим отношениям, причем не только геометрическим.

Например, для любых двух натуральных чисел a и b можно рассматривать отношение «число a дает при делении на 5 тот же остаток, что и число b» (обоснуйте самостоятельно рефлексивность, симметричность и транзитивность такого отношения). На множестве людей указанные свойства имеет отношение «a является гражданином той же страны, что и b» (если не принимать во внимание людей без гражданства и людей с двойным гражданством), а на множестве слов русского языка — отношение «слово a имеет тот же корень, что и слово b».

В логике отношения, имеющие свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности, называют ***отношениями эквивалентности***. Наличие такого отношения на множестве однородных предметов позволяет разделить их на *классы эквивалентности* — подмножества, элементы которых имеют общие свойства. Например, отношение подобия на множестве многоугольников позволяет нам рассматривать как отдельные классы равносторонние треугольники, квадраты и т. д. Действительно, все фигуры одного класса имеют общие геометрические свойства, которые сохраняются при преобразовании подобия. О таких фигурах говорят, что они являются равными *с точностью до подобия* (другими словами, имеют одинаковую форму, но отличаются размерами). Для изучения геометрических свойств фигур определенного класса достаточно рассмотреть одну произвольную фигуру и на ее примере исследовать особенности остальных фигур данного класса.

Деление на классы эквивалентности используют не только математики. Так, филологи, рассматривая для существительных русского языка отношение «слова a и b имеют одинаковые окончания при склонении», делят все существительные на три склонения. Идея деления на классы эквивалентности лежит в основе многих химических и биологических классификаций. Вспомните, как использовал эту идею в периодической таблице химических элементов Д. И. Менделеев.

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

95°. Два прямоугольных параллелепипеда подобны с коэффициентом 3. Следует ли из этого, что:

а) измерения одного параллелепипеда втрое больше соответствующих измерений другого;

б) диагональ одного параллелепипеда втрое больше диагонали другого;

в) площадь основания одного параллелепипеда втрое больше площади основания другого?

96°. Верно ли, что:

а) любые две гомотетичные фигуры подобны;

б) любые две подобные фигуры гомотетичны?

97. Опишите расположение относительно точки O прямых и плоскостей, которые при гомотетии с центром O и коэффициентом, не равным единице, переходят сами в себя.

98. При гомотетии плоскость α переходит в плоскость β, отличную от α. Каким может быть взаимное расположение прямых a и b, если $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$?

МОДЕЛИРУЕМ

99°. Изготовьте из пластилина модель куба. Отрежьте часть модели так, чтобы получить куб, гомотетичный данному с коэффициентом 0,5.

100°. Сконструируйте макет одного из предметов мебели вашей квартиры. Проведите необходимые измерения и определите масштаб, в котором выполнен макет.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

101*. По данным рисунка 37 найдите:

а) длину отрезка AC, если $PA=12$ см, $PA_1=18$ см, $A_1C_1=9$ см;

б) площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если $PA_1=40$ см, $AA_1=15$ см, а площадь треугольника ABC равна 25 см^2.

102*. Через точку O проведены три прямые, пересекающие плоскость α в точках A, B и C, а параллельную ей плоскость β — в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите неизвестные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если $AB=4$ см, $BC=6$ см, $B_1C_1=9$ см, $A_1C_1=12$ см.

103. Дан тетраэдр $PABC$ (рис. 41). Постройте фигуру, в которую переходит данный тетраэдр при гомотетии:

а) с центром P и коэффициентом $\frac{1}{3}$;

б) с центром A и коэффициентом 2.

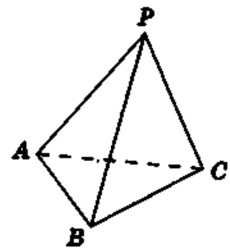


Рис. 41

104. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте фигуру, в которую переходит данный куб при гомотетии с центром B_1 и коэффициентом 1,5.

105. При гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом k точка A переходит в точку A'. Найдите:

а) k, если $A(-8;4;8)$, $A'(-6;3;6)$;

б) координаты точки A, если $A'(2;-6;4)$, $k=2$;

в) координаты точки A', если $A(-6;9;3)$, $k=\frac{1}{3}$.

106. При гомотетии с центром в начале координат треугольник ABC переходит в треугольник $A'B'C'$. Найдите координаты точек B' и C, если $A(2;0;0)$, $A'(6;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C'(0;0;9)$.

Уровень Б

107. Прямые AD и BC параллельны (рис. 42). Подобны ли треугольники AOD и COB, если точка O не лежит в плоскости прямых AD и BC? Изобразите данные точки и прямые в тетради, выбрав наиболее удачную конфигурацию для подтверждения собственного ответа.

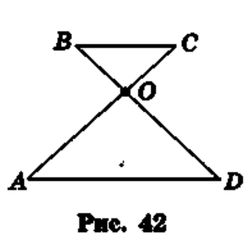


Рис. 42

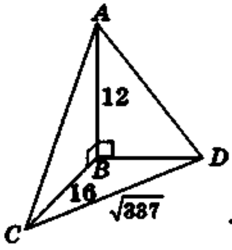


Рис. 43

108. На ребрах PA, PB и PC тетраэдра $PABC$ взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно так, что $PA_1 : A_1A = PB_1 : B_1B = PC_1 : C_1C = 3:1$.

а) Докажите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

б) Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 64 см^2.

→ 109. Треугольники ABC и DBA не лежат в одной плоскости, причем $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ (рис. 43). По данным рисунка найдите угол между плоскостями ABC и DBA.

110. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте фигуру, в которую переходит данный куб при гомотетии:

а) с центром в середине ребра BB_1 и коэффициентом 2;

б) с центром в центре грани $ABCD$ и коэффициентом 0,5.

→ 111. При гомотетии с центром O и коэффициентом 2 точка A переходит в точку A'. Найдите координаты:

а) точки A', если $O(-4;2;-1)$, $A(0;1;1)$;

б) точки O, если $A(-8;-7;-1)$, $A'(-2;3;1)$.

Уровень В

112. Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны, причем прямые AA', BB' и CC' пересекаются в точке O. Обязательно ли данные треугольники гомотетичны?

→ 113. Точка O не принадлежит ни одной из двух параллельных плоскостей α и β и не лежит между ними. Докажите, что данные плоскости гомотетичны относительно точки O.

114. Докажите, что центры граней правильного тетраэдра являются вершинами другого тетраэдра, подобного данному. Найдите коэффициент преобразования подобия, которое переводит данный тетраэдр в меньший.

Повторение перед изучением § 4

Теоретический материал

- векторы на плоскости (9 класс)

Задачи

115. На плоскости векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ отложены от одной точки, причем угол между любыми двумя из них равен 120°. Найдите сумму $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.

116. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если $\overline{AD}=2\overline{BC}$, $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=0$.

§ 4. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1 Определение и свойства векторов в пространстве

Большинство понятий и утверждений для векторов непосредственно переносятся в стереометрию из планиметрии. Напомним основные положения соответствующей геометрической теории, подробно останавливаясь на тех из них, которые в пространстве выглядят иначе, чем на плоскости.

Как известно из курса геометрии 9 класса, ***вектором*** называется направленный отрезок. Направление вектора (от начала к концу) на рисунках обозначают стрелкой. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым***. Нулевой вектор не имеет какого-либо определенного направления. На рисунке 44 изображены ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и нулевой вектор $\overrightarrow{KK}$. Нулевой вектор часто обозначают $\vec{0}$.

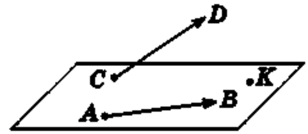


Рис. 44. Векторы в пространстве

Так же как и на плоскости, ненулевой вектор в пространстве характеризуется не только направлением, но и длиной. Это позволяет рассматривать параллельный перенос в направлении луча AB на расстояние, равное длине отрезка AB, как ***параллельный перенос на вектор*** $\overrightarrow{AB}$. В пространстве, как и на плоскости, ***равными векторами*** называются векторы, если они совмещаются параллельным переносом. На рисунке 45 изображены равные векторы $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{MN}$, которые совмещаются параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{EM}$.

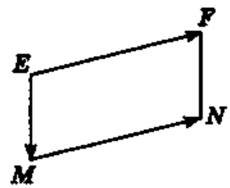


Рис. 45. Равные векторы

Так как положение точки в пространстве задается тремя координатами, дополняется определение координат вектора.

Определение

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке $B(x_2; y_2; z_2)$ называются числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$.

Соответственно ***длина (модуль) вектора*** $\overrightarrow{AB}(a_1;a_2;a_3)$ ***вычисляется по формуле***

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}\,.$$

Нулевой вектор имеет нулевые координаты, и его длина равна нулю: $\left|\bar{0}\right|=0$.

Так же как и на плоскости, в пространстве равные векторы имеют равные координаты, и наоборот: если у векторов соответствующие координаты равны, то эти векторы равны.

Напомним, что ненулевые векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

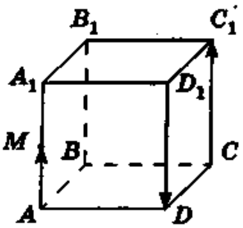


Рис. 46. Сонаправленные и противоположно направленные векторы

В свою очередь, среди коллинеарных векторов различают ***сонаправленные*** и ***противоположно направленные***. Если лучи AB и CD сонаправлены, то ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ также сонаправлены (записывают $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$); если лучи AB и CD противоположно направлены, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ также противоположно направлены (записывают $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$). На рисунке 46 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На этом рисунке векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ сонаправлены, а векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{D_1D}$ противоположно направлены. Противоположно направленные векторы, длины которых равны, называются ***противоположными***. На рисунке 46 такими являются, например, векторы $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{D_1D}$ (записывают $\overrightarrow{CC_1}=-\overrightarrow{D_1D}$).

Задача

Даны точки $A(-7;4;2)$ и $B(-2;0;-1)$. Найдите координаты концов вектора $\overrightarrow{CD}$, равного вектору $\overrightarrow{AB}$, если точка C лежит на оси аппликат, а точка D — в плоскости Oxy.

Решение

Пусть $\overrightarrow{CD}(a_1;a_2;a_3)$. Так как $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$, то $a_1=-2-(-7)=5$, $a_2=0-4=-4$, $a_3=-1-2=-3$. Следовательно, $\overrightarrow{CD}(5;-4;-3)$. Учитывая условия расположения точек C и D, имеем: $C(0;0;z)$, $D(x;y;0)$, то есть $\overrightarrow{CD}(x;y;-z)$. Отсюда $x=5$, $y=-4$, $z=3$.

Ответ: $C(0;0;3)$, $D(5;-4;0)$.

4.2. Операции над векторами в пространстве

Операции сложения и вычитания для векторов в пространстве определяют аналогично тому, как их вводили на плоскости. Итак, для векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overline{(a_1+b_1; a_2+b_2; a_3+b_3)},$$
$$\vec{a}-\vec{b}=\overline{(a_1-b_1; a_2-b_2; a_3-b_3)}.$$

Так же сохраняются в пространстве и соответствующие свойства этих операций. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Доказательство утверждений 1–4 несложно получить с помощью геометрических построений аналогично тому, как это проводилось на плоскости.

Для действий с неколлинеарными векторами в геометрической форме в пространстве, как и на плоскости, можно воспользоваться ***правилом треугольника*** (рис. 47, *а*) и ***правилом параллелограмма*** (рис. 47, *б*). Правила сложения двух коллинеарных векторов иллюстрирует рисунок 47, *в, г*.

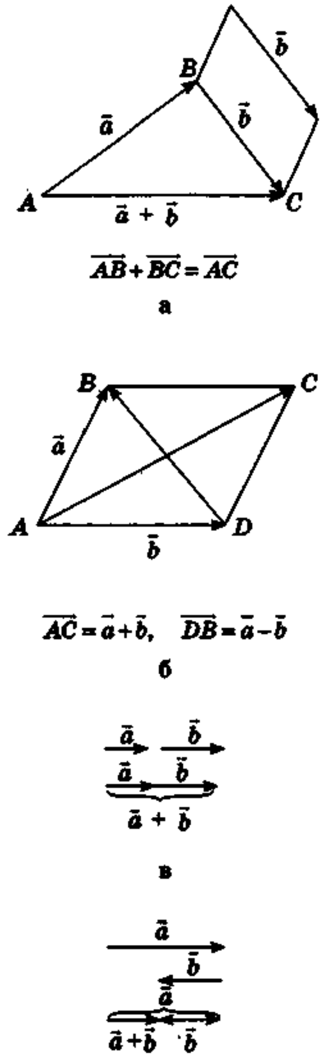
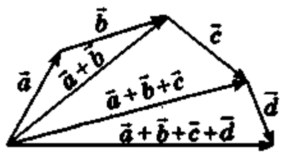


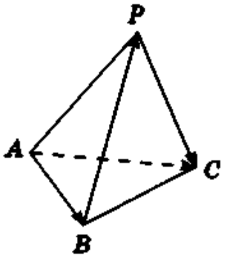
Рис. 47. Правила для действий с векторами

Обобщением правила треугольника для сложения нескольких векторов является ***правило многоугольника*** (рис. 48, *а*). Особенность его применения в пространстве заключается в том, что векторы-слагаемые не обязательно принадлежат одной плоскости (то есть многоугольник, который получается при построении вектора-суммы, может быть пространственным). Например, на рисунке 48, *б* в тетраэдре $PABC$ получим векторное равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}$.

Опишем еще одно правило, которое служит для сложения трех векторов в пространстве. Пусть векторы-слагаемые $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ при откладывании их от общего начала O не лежат в одной



а



б

Рис. 48. Сложение векторов по правилу многоугольника

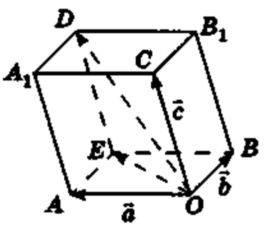


Рис. 49. Сложение векторов по правилу параллелепипеда

плоскости. Построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB и OC, которые изображают векторы-слагаемые, были его ребрами (рис. 49). Тогда, используя правило параллелограмма, получаем $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$. Следовательно, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OD}$, то есть вектор-сумма изображается диагональю параллелепипеда, построенного на векторах-слагаемых. Это правило сложения векторов представляет собой пространственный аналог правила параллелограмма и называется ***правилом параллелепипеда***.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ ***на число*** k (или произведением числа k на вектор $\vec{a}$) в пространстве называют вектор $\overline{(ka_1;ka_2;ka_3)}$, который обозначают $k\vec{a}$ или $\vec{a}k$. Если $\vec{a}\neq\vec{0}$, то вектор $k\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$ при условии $k>0$ и противоположно направлен вектору $\vec{a}$ при условии $k<0$, причем при любом значении k $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$. В частности, $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$, где $-\vec{a}$ — вектор, противоположный вектору $\vec{a}$.

Основные свойства умножения вектора на число, известные из курса планиметрии, в стереометрии сохраняются. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и чисел k, m:

1) $k\vec{a}=\vec{a}k$;
2) $(km)\vec{a}=k(m\vec{a})$;
3) $k\vec{0}=0\vec{a}=\vec{0}$;
4) $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$;
5) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

Доказательство утверждений 1–5 аналогично случаю на плоскости. Докажем, например, утверждение 4. Пусть дан вектор $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$. Тогда, по определению произведения вектора на число и суммы векторов, имеем:

$$(k+m)\vec{a}=\overline{((k+m)a_1;(k+m)a_2;(k+m)a_3)}=\overline{(ka_1+ma_1;ka_2+ma_2;ka_3+ma_3)}=$$
$$=\overline{(ka_1;ka_2;ka_3)}+\overline{(ma_1;ma_2;ma_3)}=k\vec{a}+m\vec{a}.$$

В пространстве сохраняется также необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов: если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарные векторы, то существует число k такое, что $\vec{b}=k\vec{a}$, и наоборот: если для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{b}=k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

При решении задач векторное равенство $\vec{b}=k\vec{a}$ для векторов $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ часто применяют в координатной форме: $\begin{cases} b_1=ka_1, \\ b_2=ka_2, \\ b_3=ka_3. \end{cases}$ Если данные векторы не имеют нулевых координат, удобнее использовать пропорциональные соотношения $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}=k$.

В пространстве, как и на плоскости, необходимым и достаточным условием принадлежности точек A, B и C одной прямой является коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Рассмотрим еще одно векторное условие принадлежности точек A, B и C одной прямой.

Опорная задача

(условие принадлежности трех точек одной прямой)

Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то для любой точки пространства O выполняется векторное равенство $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$, где k — некоторое число. Докажите.

Решение

Так как точки A, B и C лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$ коллинеарны, то есть существует число k такое, что $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BA}$. Учитывая, что $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$, имеем:

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=k\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right),\quad \overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB},$$

что и требовалось доказать.

4.3. Скалярное произведение векторов в пространстве

Скалярным произведением векторов $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ называется число $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Обычно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$.

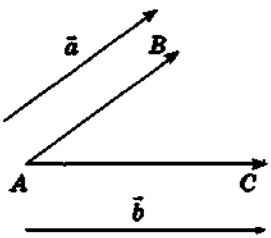
Свойства скалярного произведения векторов, известные из курса планиметрии, в пространстве сохраняются. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и числа k: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$; 3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Доказательство утверждений 1–3 аналогично случаю на плоскости. Докажем, например, утверждение 3. Пусть даны векторы $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ и $\vec{c}(c_1;c_2;c_3)$. Тогда, по определению скалярного произведения, имеем:

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\left(\overline{(a_1;a_2;a_3)}+\overline{(b_1;b_2;b_3)}\right)\cdot\overline{(c_1;c_2;c_3)}=$$

$$=\overline{(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)}\cdot\overline{(c_1;c_2;c_3)}=(a_1+b_1)\cdot c_1+(a_2+b_2)\cdot c_2+(a_3+b_3)\cdot c_3=$$

$$=(a_1\cdot c_1+a_2\cdot c_2+a_3\cdot c_3)+(b_1\cdot c_1+b_2\cdot c_2+b_3\cdot c_3)=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$



$\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle BAC$

Рис. 50. Угол между векторами

В пространстве углом между ненулевыми векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называют угол BAC, а углом между произвольными ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — угол между векторами, которые равны данным векторам и имеют общее начало (рис. 50).

Точно так же как и на плоскости, в пространстве доказывают, что скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними. Таким образом, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$. Отсюда следует, что скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ равен квадрату его длины: $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|a|^2$. Сохраняется также необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов: если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, и наоборот: если для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Задача

Докажите с помощью векторов, что прямая, перпендикулярная двум сторонам треугольника, перпендикулярна и третьей его стороне.

Решение

Пусть прямая MN перпендикулярна сторонам AB и BC треугольника ABC (рис. 51). Докажем, что $MN \perp AC$. По свойству перпендикулярных векторов $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Так как $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Следовательно, по признаку перпендикулярности векторов векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AC}$, а значит, прямые MN и AC перпендикулярны.

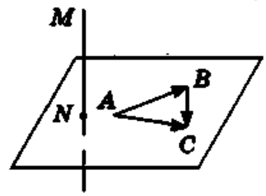


Рис. 51

Свойства векторов широко применяются в физике и технике, где исследователям часто приходится рассматривать пространственные векторные величины — силу, скорость, перемещение и др. Например, электрический ток, направление которого задано вектором $\vec{n}$, образует магнитное поле, которое в каждой точке пространства характеризуется вектором магнитной индукции $\vec{B}$ (рис. 52).

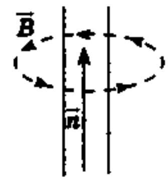


Рис. 52. Векторы магнитной индукции магнитного поля прямого проводника тока

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

117.* Дан вектор $\overrightarrow{AB}(a; b; c)$. Назовите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

118.* В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины ребер AA_1 и CC_1 соответственно (рис. 53). Назовите векторы с началом и концом в отмеченных на рисунке точках:

а) равные вектору $\overrightarrow{AM}$;

б) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{CN}$, но не равные ему;

в) противоположно направленные к вектору $\overrightarrow{MN}$;

г) противоположные вектору $\overrightarrow{BC}$;

д) коллинеарные вектору $\overrightarrow{A_1B_1}$.

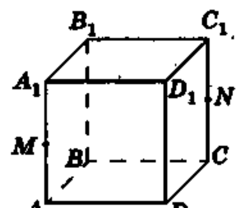


Рис. 53

119. Известно, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Каким может быть взаимное расположение:

а) прямых AC и BD;

б) точки D и плоскости, проходящей через точки A, B и C;

в) прямой AB и плоскости, проходящей через точки C и D?

120. По данным рисунка 53 укажите вектор с началом и концом в вершинах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, равный:

а) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1C}$; в) $\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}$.

б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A_1B_1}$; г) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC_1}$;

Представьте векторы $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{NM}$ в виде разности двух векторов, начала и концы которых совпадают с отмеченными на рисунке точками.

121. На рисунке 54 точки D, E, F и M — середины ребер тетраэдра $PABC$. Определите число k из векторного равенства:

а) $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{ED}=k\overrightarrow{PC}$;

б) $\overrightarrow{PF}=k\overrightarrow{BP}$; г) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{MD}$.

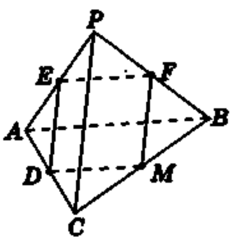


Рис. 54

122. Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен φ. Найдите угол между векторами:

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$.

б) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$;

123. По данным рисунка 53 найдите угол между векторами:

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{A_1B}$;

б) $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$; д) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.

в) $\overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{B_1A}$;

Назовите несколько пар векторов с началом и концом в отмеченных на рисунке точках, скалярное произведение которых равно нулю.

МОДЕЛИРУЕМ

Изготовьте из проволоки модель параллелепипеда. Продемонстрируйте применение правила параллелепипеда для сложения трех векторов.

125.* **Изготовьте модель бипирамиды (рис. 55). По правилу многоугольника запишите сумму векторов, которые изображаются ребрами бипирамиды, так, чтобы каждое ребро входило в сумму ровно один раз, а сама сумма равнялась нулевому вектору. Можно ли составить такую же нулевую сумму для треугольной пирамиды?**

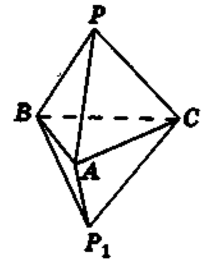


Рис. 55

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ*

Уровень А

126.* **Найдите координаты и длину вектора $\overline{AB}$, если:**

а) $A(-4;0;2)$, $B(-1;4;2)$;

б) $A(6;1;-4)$, $B(0;-1;-7)$;

в) $A(3;7;0)$, $B(-2;4;-1)$.

127.* **Докажите равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, если $A(-2;-1;0)$, $B(4;1;-1)$, $C(3;0;2)$, $D(9;2;1)$.**

→ 128.* **От точки $A(-1;0;4)$ отложен вектор $\vec{m}(-2;3;6)$. Найдите координату конца этого вектора и его длину.**

129. **Докажите с помощью векторов, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, если $A(4;-1;7)$, $B(-2;3;6)$, $C(-1;5;1)$, $D(5;1;2)$.**

→ 130. **Найдите значение m, при котором:**

а) длина вектора $\vec{a}(-4;m;2)$ равна 6;

б) длина вектора $\vec{a}(3m;8;-4m)$ равна 17.

131. **В пространстве даны точки A, B, C и D. Укажите вектор с началом и концом в данных точках, равный:**

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$;

в) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CB}$.

→ 132. **Упростите выражение:**

а) $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{KN}$;

б) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$;

в) $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DM}$.

* В ответах к некоторым задачам этого параграфа приводится один из возможных вариантов правильного ответа.

133. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите вектор с началом и концом в вершинах куба, равный:

а) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1D}$;
б) $\overrightarrow{BC_1}-\overrightarrow{BA}$;
в) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{C_1C}$;
г) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$;
д) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{A_1D}$;
е) $\overrightarrow{DA_1}-\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1B}$.

→ **134.** Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Укажите вектор с началом и концом в вершинах призмы, равный:

а) $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{CB}$;
б) $\overrightarrow{B_1A}-\overrightarrow{C_1C}$;
в) $\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{AC}$.

135. Даны векторы $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(-3;0;2)$, $\vec{c}(4;-2;1)$. Найдите координаты вектора:

а) $\vec{a}+2\vec{c}$; б) $3\vec{a}-\vec{b}$; в) $0{,}5\vec{b}-3\vec{c}$.

136. Известно, что $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AO}$. Докажите, что точки A и B симметричны относительно точки O.

→ **137.** Найдите координаты и длины векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}(0;-1;4)$, $\vec{b}(2;-2;2)$.

138. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если:

а) $\vec{a}(-3;9;6)$, $\vec{b}(1;-3;-2)$;
б) $\vec{a}(0;2;-3)$, $\vec{b}(0;8;-12)$;
в) $\vec{a}(10;-25;20)$, $\vec{b}(-14;35;-28)$.

→ **139.** Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A(8;-3;0)$, $B(-1;2;3)$, $C(0;6;-4)$, $D(9;1;-1)$?

140. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $\vec{a}(-3;2;-1)$, $\vec{b}(1;4;2)$;
б) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$;
в) $\angle(\vec{a},\vec{b})=90°$.

141. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите скалярное произведение:

а) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CC_1}$;
б) $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{AD}$;
в) $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}$;
г) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{D_1A_1}$;
д) $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}$.

→ **142.** Даны векторы $\vec{a}(4;1;-2)$ и $\vec{b}(-1;8;m)$. При каком значении m:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$;
б) $\vec{a}\cdot\vec{b}=8$;
в) $\vec{a}\perp\vec{b}$?

143. Среди векторов $\vec{a}(-1;-2;1)$, $\vec{b}(3;-1;1)$, $\vec{c}(-5;1;0)$ выберите пару векторов, угол между которыми является:

а) тупым; б) прямым.

→ **144.** Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $120°$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-9$. Найдите длины этих векторов, если вектор $\vec{a}$ вдвое длиннее $\vec{b}$.

Уровень Б

145. Найдите координаты концов вектора $\overrightarrow{AB}(-9;1;3)$, если его начало лежит на оси ординат, а конец — в плоскости Oxz.

→ **146.** С помощью векторов найдите координаты вершины A параллелограмма $ABCD$, если $B(8;-1;3)$, $C(-2;0;1)$, $D(-3;4;5)$.

147. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите вектор $\vec{a}$ с началом и концом в вершинах куба, удовлетворяющий равенству:

а) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\vec{a}+\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{BD}$;

б) $\overrightarrow{BA}+\vec{a}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.

148. Дан параллелограмм $ABCD$, O — произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

→ **149.** Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O — произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB_1}$.

150. Точки M и N — середины ребер PA и BC тетраэдра $PABC$, точка O — середина отрезка MN. Докажите, что $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

→ **151.** Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=2\overrightarrow{BC}$.

152. Может ли быть равна нулевому вектору сумма трех векторов, если их длины равны:

а) 1, 4 и 6; б) 2, 9 и 7; в) 5, 6 и 8?

Определите закономерности и обобщите полученные результаты.

153. К точке $M(1;-2;4)$ приложены силы $\overrightarrow{F_1}(2;-5;0)$ и $\overrightarrow{F_2}(-1;3;2)$. Найдите точку, в которую переходит точка M под действием равнодействующей этих сил.

→ **154.** Найдите координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}+\vec{b}=\overline{(4;-2;-1)}$, $\vec{a}-\vec{b}=\overline{(-4;-4;3)}$.

155. **Диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Найдите значение k, при котором:**

а) $\overline{B_1A} = k\overline{DC_1}$;

б) $\overline{DA_1} + \overline{A_1B_1} = k\overline{DO}$;

в) $\overline{AA_1} + \overline{AB} + \overline{AD} = k\overline{C_1O}$.

156. **Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если:**

а) $A(6;-1;0)$, $B(0;5;-3)$, $C(4;1;-1)$;

б) $A(-3;1;1)$, $B(-1;4;-5)$, $C(0;-2;-4)$;

в) $A(-7;3;-2)$, $B(-12;14;-9)$, $C(3;-19;12)$?

В случае утвердительного ответа определите, какая из данных точек лежит между двумя другими.

157. **При гомотетии с центром O и коэффициентом 3 точка A переходит в точку A'. Найдите координаты:**

а) точки A', если $O(-4;2;-1)$, $A(0;1;1)$;

б) точки O, если $A(-8;-7;-1)$, $A'(-2;3;1)$.

→ **158.** **Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют координаты $A(4;0;-2)$, $B(5;2;0)$, $C(-3;2;6)$, $D(0;0;1)$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.**

159. **Даны точки $A(0;2;-1)$, $B(0;1;-2)$, $C(1;2;-2)$. Найдите угол ABC.**

→ **160** **Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°, $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$. Найдите:**

а) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$; б) $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot\vec{a}$; в) $(\vec{a}-2\vec{b})^2$.

Уровень В

161. **Дан тетраэдр $PABC$. Постройте точку M, удовлетворяющую векторному равенству $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}-\overline{PM}=\vec{0}$.**

→ **162.** **Точки K, M и N — середины сторон треугольника ABC, точка O — произвольная точка пространства. Докажите, что $\overline{OK}+\overline{OM}+\overline{ON}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$.**

163. **Отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон четырехугольника $ABCD$, пересекаются в точке M, точка O — произвольная точка пространства.**

Докажите, что $\overline{OM}=\frac{1}{4}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}\right)$.

Прямая AB пересекает плоскость Oxy в точке C. Найдите ее координаты, если $A(3;-8;7)$, $B(-1;2;-7)$.

Найдите координаты точки пересечения прямой AB с осью аппликат, если $A(2;6;7)$, $B(-1;-3;1)$.

166. Даны точки $A(2;3;5)$, $B(3;2;7)$, $C(6;-1;13)$, $D(5;0;11)$. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм?

Даны точки $A(3;-2;7)$, $B(5;-4;9)$, $C(13;-8;-3)$, $D(0;-12;6)$. Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости BCD.

Даны точки $A(2;-3;2)$, $B(6;-1;3)$, $C(9;-5;-1)$, $D(5;-7;-2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $60°$. Каждый из данных векторов перпендикулярен вектору $\vec{c}$. Найдите $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Найдите углы, которые образует вектор $\sqrt{2}\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ с каждым из данных векторов.

Повторение перед изучением § 5

Теоретический материал

- аксиомы стереометрии и следствия из них (10 класс)
- метод координат и векторный метод на плоскости (9 класс)

Задачи

Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$.

Точки A, B, C и D не лежат на одной прямой. Докажите, что если $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, то четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ И ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

5.1. Компланарные векторы. Разложение вектора по трем компланарным векторам

Рассматривая векторы на плоскости, мы уделяли особое внимание коллинеарным векторам — векторам, которые при условии откладывания их от одной и той же точки лежат на одной прямой. В пространстве важную роль играют векторы, которые при условии откладывания их от одной точки лежат в одной плоскости.

Компланарные — от латинского «ком» — вместе и «планум» — плоскость — расположенные в одной плоскости.

Определение

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они лежат в одной плоскости.

Из определения компланарных векторов следует, что ***направленные отрезки, изображающие компланарные векторы, лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.***

Очевидно, что любые два вектора компланарны. Компланарными являются также три вектора, среди которых хотя бы один нулевой, и три вектора, среди которых хотя бы два коллинеарны. Данные утверждения следуют непосредственно из определения (объясните почему).

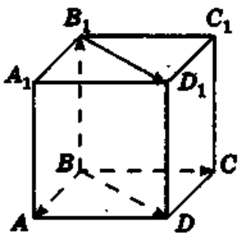


Рис. 56. Компланарные и некомпланарные векторы

На рисунке 56 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ компланарны, так как отрезки BA, BC и BD лежат в одной плоскости; векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$ также компланарны, так как отрезки BA, BC и B_1D_1 лежат в параллельных плоскостях ABC и $A_1B_1C_1$. Векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ не компланарны, так как отрезки BA, BC и BB_1 не лежат ни в одной плоскости, ни в параллельных плоскостях.

Опорная задача
(признак компланарности трех векторов)

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть представить в виде $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, где m и n — некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Докажите.

Решение

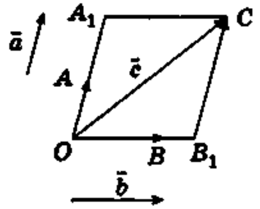


Рис. 57. К доказательству признака компланарности трех векторов

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Отложим от произвольной точки пространства O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рис. 57). Очевидно, что эти векторы, как и прямые OA и OB, лежат в одной плоскости. В этой же плоскости лежат векторы $\overrightarrow{OA_1}=m\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB_1}=n\overrightarrow{OB}$, а значит, и их сумма — вектор $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, равный вектору $\vec{c}$. Итак, векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ лежат в одной плоскости, то есть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Заметим, что полученное векторное соотношение $\overrightarrow{OC}=$ $=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ можно рассматривать как условие принадлежности точки O плоскости ABC.

Напомним: в 9 классе было доказано, что на плоскости для любого вектора $\vec{c}$ существует единственное представление в виде $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, где m и n — некоторые числа, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — фиксированные неколлинеарные векторы (такое представление называют разложением вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

В отличие от плоскости, в пространстве вектор не всегда можно разложить по двум неколлинеарным векторам, но всегда можно разложить по трем некомпланарным векторам.

Теорема (о разложении вектора по трем некомпланарным векторам)

Любой вектор $\vec{d}$ можно разложить по трем некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то есть представить в виде $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, где m, n и p — некоторые числа, причем такое разложение единственно.

Доказательство

☐ Отложим от произвольной точки пространства O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ и $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$. Проведем через точку D прямую, параллельную OC. Она пересечет плоскость AOB в некоторой точке D_1. Рассмотрим случай, когда точка D_1 не принадлежит ни одной из прямых OA и OB (рис. 58). Проведем через точку D_1 прямую, параллельную OB. Она пересечет прямую OA в некоторой точке D_2. По правилу многоугольника:

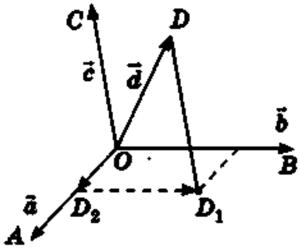


Рис. 58. К доказательству теоремы о разложении вектора по трем некомпланарным векторам

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD_2}+\overrightarrow{D_2D_1}+\overrightarrow{D_1D}. \qquad (1)$$

Но $\overrightarrow{OD_2}$ и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{D_2D_1}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{D_1D}$ и $\overrightarrow{OC}$ — пары коллинеарных векторов, значит, существуют числа m, n и p такие, что $\overrightarrow{OD_2}=m\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{D_2D_1}=n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{D_1D}=p\overrightarrow{OC}$. Подставив эти выражения в равенство (1), получим $\overrightarrow{OD}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}$, то есть

$$\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}. \qquad (2)$$

Другие случаи расположения точки D_1 относительно плоскости AOB рассмотрите самостоятельно.

Докажем теперь единственность разложения (2) методом от противного. Допустим, что существует другой набор чисел m_1, n_1 и p_1, для которых имеет место равенство $\vec{d}=m_1\vec{a}+n_1\vec{b}+p_1\vec{c}$. Вычитая это равенство из равенства (2), получим $\vec{0}=(m-m_1)\vec{a}+(n-n_1)\vec{b}+(p-p_1)\vec{c}$.

Покажем, что полученное равенство выполняется только в случае, когда $m-m_1=0$, $n-n_1=0$, $p-p_1=0$. Действительно, если, например, $p-p_1\neq 0$, то тогда $\vec{c}=-\frac{m-m_1}{p-p_1}\vec{a}-\frac{n-n_1}{p-p_1}\vec{b}$. Отсюда по признаку компланарности векторов следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, но это противоречит условию теоремы. Следовательно, наше предположение неверно, и $m=m_1$, $n=n_1$, $p=p_1$. Таким образом, разложение (2) единственно. ■

Доказанная теорема имеет широкое практическое применение. Например, некоторые космические корабли (рис. 59) оснащены тремя блоками двигателей, позволяющими двигаться вдоль трех некомпланарных векторов. Управляя их взаимодействием, корабль в пространстве можно перемещать в любом направлении.

Рис. 59. Космический корабль «Space Shuttle»

Отметим также связь доказанной теоремы с правилом параллелепипеда. На рисунке 60 диагональ DB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ изображает сумму трех векторов: $\overrightarrow{DB_1} = \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

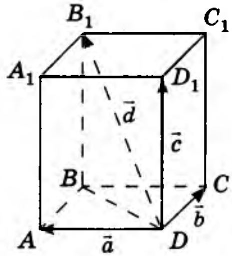


Рис. 60. Разложение вектора по правилу параллелепипеда

Данная теорема применяется и в прямоугольной системе координат: вектор $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ часто раскладывают по единичным векторам $\vec{e}_1(1;0;0)$, $\vec{e}_2(0;1;0)$ и $\vec{e}_3(0;0;1)$, сонаправленным с осями координат. Эти единичные векторы называют ***координатными векторами*** или ***ортами*** (рис. 61). Нетрудно доказать, что коэффициенты такого разложения равны координатам вектора $\vec{a}$, то есть $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.

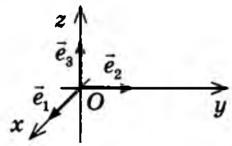


Рис. 61. Координатные векторы

Опорная задача
(о точке пересечения медиан треугольника)

Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка пространства, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Докажите.

Решение

Пусть BD — медиана треугольника ABC (рис. 62). По свойству точки пересечения медиан треугольника $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}.$$

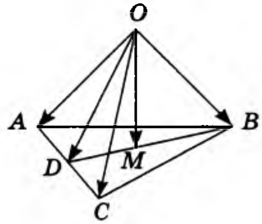


Рис. 62

Так как $\overline{OD}=\frac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right)$ (объясните почему),

то $\overline{OM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right)+\frac{1}{3}\overline{OB}=\frac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)$.

Задача

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали грани CC_1D_1D пересекаются в точке O (рис. 63). Разложите вектор $\overline{AO}$ по векторам $\overline{AB}=\vec{a}$, $\overline{AD}=\vec{b}$, $\overline{AA_1}=\vec{c}$.

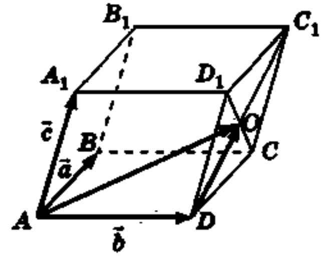


Рис. 63

Решение

По правилу треугольника $\overline{AO}=\overline{AD}+\overline{DO}$.

Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед,

то $\overline{AB}=\overline{DC}=\vec{a}$, $\overline{AA_1}=\overline{DD_1}=\vec{c}$,

$\overline{DO}=\frac{1}{2}\left(\overline{DC}+\overline{DD_1}\right)=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$.

Отсюда $\overline{AO}=\vec{b}+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

5.2. Векторный и координатный методы в пространстве

Так же как и на плоскости, в пространстве использование векторов и векторных соотношений во многих случаях упрощает рассуждения и расчеты в задачах и теоремах.

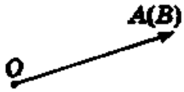
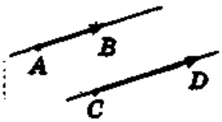
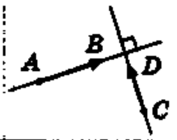
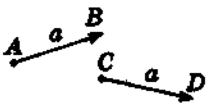
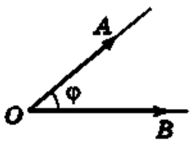
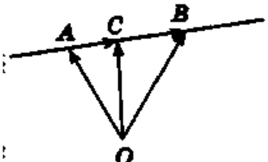
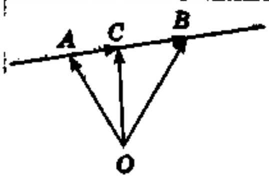
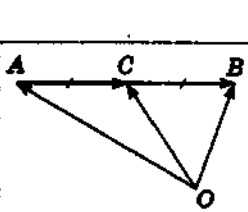
Применение векторного метода предусматривает три основных этапа:

1) сформулировать задачу на «языке векторов» — для этого необходимо рассмотреть векторы, связанные с данными отрезками, и составить соответствующие условию задачи векторные равенства;

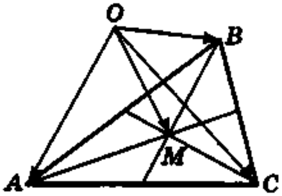
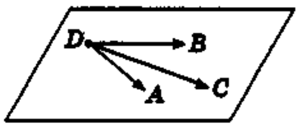
2) преобразовать составленные равенства, воспользовавшись известными векторными соотношениями;

3) перевести полученные результаты на «язык геометрии».

Для перевода геометрических соотношений на «язык векторов» и наоборот обобщим некоторые результаты, полученные в теоремах и задачах 9 и 11 классов, в приведенной ниже таблице.

№ п/п	Рисунок	Утверждение на «языке геометрии»	Утверждение на «языке векторов»
1		Точки A и B совпадают	$\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ или $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$, где O — некоторая точка пространства
2		$AB \parallel CD$	$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$, $k\neq 0$ (прямые AB и CD не совпадают)
3		$AB \perp CD$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$
4		$AB=CD=a$	$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{CD}^2=a^2$
5		$\angle AOB=\varphi$	$\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\lvert\overrightarrow{OA}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{OB}\rvert}$
6		Точка C лежит на прямой AB	$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ или $\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+(1-p)\overrightarrow{OB}$, где O — некоторая точка пространства
7		$C\in AB$, $AC:CB=m:n$	$\overrightarrow{AC}=\dfrac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ или $\overrightarrow{OC}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, где O — некоторая точка пространства
8		C — середина AB	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ или $\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, где O — некоторая точка пространства

Окончание таблицы

№ п/п	Рисунок	Утверждение на «языке геометрии»	Утверждение на «языке векторов»
9		*M* — середина *AB*, *N* — середина *CD*	$\overline{MN}=\frac{1}{2}\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)$
10		*M* — точка пересечения медиан (центроид) треугольника *ABC*	$\overline{OM}=\frac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)$, где *O* — некоторая точка пространства
11		Точка *D* лежит в плоскости *ABC*	$\overline{DC}=m\overline{DA}+n\overline{DB}$ или $\overline{OD}=m\overline{OA}+n\overline{OB}+$ $+(1-m-n)\overline{OC}$, где *O* — некоторая точка пространства

Рассмотрим сначала пример применения векторного метода для доказательства уже известного стереометрического факта.

Задача

Докажите с помощью векторов признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна двум прямым, которые лежат в плоскости и пересекаются, то она перпендикулярна данной плоскости.

Решение

Пусть $MN\perp AB$, $MN\perp AC$ (рис. 64). Докажем, что $MN\perp(ABC)$.

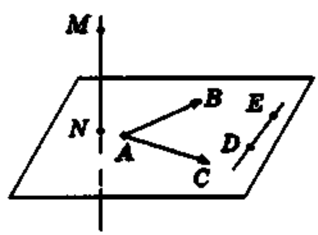


Рис. 64

По признаку перпендикулярности прямой и плоскости необходимо доказать, что прямая *MN* перпендикулярна любой прямой

плоскости ABC. Пусть DE — произвольная прямая плоскости ABC. Докажем, что $MN \perp DE$, то есть $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$.

Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не коллинеарны, то любой вектор плоскости ABC можно разложить по этим векторам, то есть существуют числа m и n такие, что $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$. Поэтому

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{MN}\left(m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}\right) = m\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

По условию задачи $MN \perp AB$, $MN \perp AC$, следовательно, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, откуда $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$. Таким образом, прямая MN перпендикулярна любой прямой плоскости ABC, то есть по признаку $MN \perp (ABC)$.

В ходе решения задач векторный метод часто объединяют с методом координат. Напомним, что решение геометрической задачи методом координат также состоит из трех основных этапов:

1) задать систему координат и сформулировать данную задачу на «языке координат»;

2) преобразовать алгебраические выражения, воспользовавшись известными соотношениями и формулами;

3) перевести полученный результат на «язык геометрии».

Обычно на первом этапе решения систему координат выбирают так, чтобы как можно больше координат вершин рассматриваемой фигуры были равны нулю или одному и тому же числу — это позволяет максимально упростить дальнейшие алгебраические преобразования. Методом координат в пространстве удобнее пользоваться тогда, когда элементами данной фигуры являются три взаимно перпендикулярных отрезка с общим концом. В таком случае систему координат целесообразно вводить так, чтобы эти отрезки лежали на осях координат.

Задача

Найдите угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых содержит диагональ куба, а вторая — диагональ его грани.

Решение

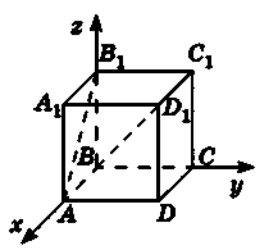


Рис. 65

Разместим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a в системе координат так, как показано на рисунке 65, и найдем угол между прямыми BD_1 и B_1A,

воспользовавшись формулой скалярного произведения векторов $\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{B_1A} = \left|\overrightarrow{BD_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{B_1A}\right| \cdot \cos\angle\left(\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{B_1A}\right)$.

Так как $B(0;0;0)$, $D_1(a;a;a)$, $B_1(0;0;a)$, $A(a;0;0)$, то $\overrightarrow{BD_1}(a;a;a)$, $\overrightarrow{B_1A}(a;0;-a)$.

Следовательно, $\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{B_1A} = a \cdot a + a \cdot 0 + a \cdot (-a) = 0$, то есть данные векторы перпендикулярны, и искомый угол равен 90°.

Ответ: 90°.

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

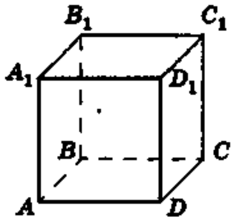


Рис. 66

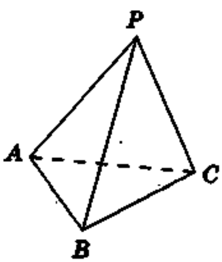


Рис. 67

173.° На рисунке 66 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Определите, компланарны ли векторы:

а) $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$;

б) $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{AA_1}$;

в) $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$;

г) $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{AC}$.

174.° Дан тетраэдр $PABC$ (рис. 67). Назовите вектор с началом и концом в вершинах тетраэдра, который вместе с двумя данными векторами составляет тройку некомпланарных векторов (в каждом случае приведите все возможные варианты ответа):

а) $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AC}$, ...;

б) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BP}$, ...;

в) $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{AB}$, ...

175. Компланарны ли любые три коллинеарных вектора? Всегда ли коллинеарны любые три компланарных вектора?

176. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ лежат на трех попарно скрещивающихся прямых. Могут ли данные векторы быть компланарными? Приведите пример.

177. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны. Компланарны ли векторы:
а) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $2\vec{a}$; б) $\vec{a}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}+\vec{c}$; в) $3\vec{a}$, $-2\vec{b}$ и $4\vec{c}$?

178. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны; векторы $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ также компланарны. Могут ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$ быть некомпланарными? В каком случае?

179. Назовите координаты вектора $\vec{a}$, если $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ являются координатными векторами и известно, что:
а) $\vec{a}=-3\vec{e}_1+8\vec{e}_2+\vec{e}_3$; в) $\vec{a}=-9\vec{e}_2$.
б) $\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_3$;

180. Найдите коэффициенты m, n и p в разложении $\vec{a}=m\vec{e}_1+$ $+n\vec{e}_2+p\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — координатные векторы, если:
а) $\vec{a}(5;-3;1)$; б) $\vec{a}(-7;0;3)$; в) $\vec{a}=\vec{e}_1$.

МОДЕЛИРУЕМ

181.* На модели куба зафиксируйте два вектора, изображаемые скрещивающимися ребрами. Укажите ребро, которое должно изображать третий вектор так, чтобы три зафиксированных вектора были некомпланарными. Можно ли указать третье ребро такое, чтобы три зафиксированных вектора были компланарными?

182.* Изготовьте модель четырех векторов с равными длинами и общим началом. Смоделируйте геометрическую конфигурацию, при которой:
а) любые три из данных векторов компланарны;
б) только три из данных векторов компланарны.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

183.* Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$ вектор:
а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{A_1C_1}$; в) $\overrightarrow{B_1D}$.

184.* Точки D и E — середины ребер AB и PC тетраэдра $PABC$ соответственно. Разложите вектор:
а) $\overrightarrow{AP}$ по векторам $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CE}$;
б) $\overrightarrow{BE}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{PC}$.

185. Вне плоскости параллелограмма $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O, взята точка P. Разложите вектор $\overrightarrow{PO}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AP}$.

186. На тело действуют три силы, изображаемые некомпланарными векторами. Докажите, что равнодействующая этих сил не может быть равна нулю.

187. На тело, размещенное в начале координат, действуют три силы, изображаемые координатными векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Найдите величину их равнодействующей, если величина каждой из данных сил 1 Н.

188. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны. Коллинеарны ли векторы:

а) $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$;

б) $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{e}=-9\vec{a}+6\vec{b}-3\vec{c}$?

189. Параллелограммы $ABCD$ и A_1BC_1D не лежат в одной плоскости. Докажите векторным методом, что $AA_1 \parallel CC_1$.

190. Докажите векторным методом теорему о трех перпендикулярах.

191. Отрезок MA — перпендикуляр к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите векторным методом, что $MD \perp CD$.

192. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите векторным методом угол между прямыми AB_1 и A_1D.

193. Докажите векторным методом, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

Уровень Б

194. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K и M — середины ребер B_1C_1 и CD соответственно. Разложите по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$ вектор:

а) $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{MB_1}$; в) $\overrightarrow{KM}$.

Точки D и E — середины ребер AB и PC тетраэдра $PABC$. Докажите, что $\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PB}\right)$. Компланарны ли векторы $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{PB}$?

196. Медианы грани ABC тетраэдра $PABC$ пересекаются в точке O. Разложите вектор $\overrightarrow{PA}$ по векторам $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ и $\overrightarrow{PO}$.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны. Докажите, что векторы $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{a}+\vec{c}$ не компланарны.

→ 198. В тетраэдре $PABC$ медианы грани ABC пересекаются в точке O. Докажите, что $PO<\frac{1}{3}(PA+PB+PC)$.

199. В тетраэдре $PABC$ $PA\perp BC$, $PB\perp AC$. Докажите, что $PC\perp AB$.

→ 200. Докажите, что если в тетраэдре $PABC$ $PC\perp AB$, то $AC^2+PB^2=$ $=PA^2+BC^2$. Верно ли обратное утверждение?

201. Лучи OA, OB и OC взаимно перпендикулярны. Найдите угол между биссектрисами углов AOC и AOB.

Уровень В

202 (опорная). ***Для того чтобы точка D принадлежала плоскости ABC, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось векторное равенство*** $\overline{OD}=m\overline{OA}+n\overline{OB}+(1-m-n)\overline{OC}$, ***где O — некоторая точка пространства, m и n — числа.*** Докажите.

203. Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точки пересечения медиан треугольников A_1BD и CB_1D_1 и делится ими на три равные части (рис. 68).

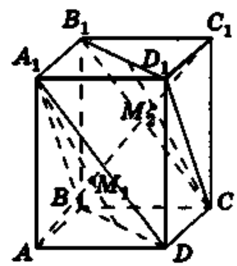


Рис. 68

→ 204. Известно, что $\overline{OK}=3\overline{OA}+3\overline{OB}+3\overline{OC}$, причем векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ не компланарны. В каком отношении плоскость ABC делит отрезок OK, считая от точки O?

205. *Средней линией тетраэдра* называют отрезок, соединяющий середины двух его скрещивающихся ребер, а *медианой тетраэдра* — отрезок, соединяющий его вершину с точкой пересечения медиан противолежащей грани. Докажите, что:

а) средние линии тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею пополам;

б) медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3:1$, считая от вершины;

в) точка пересечения медиан тетраэдра совпадает с точкой пересечения его средних линий.

→ 206. Докажите, що если M — точка пересечения медиан тетраэдра $PABC$, O — произвольная точка пространства, то $\overline{OM}=\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OP})$.

Повторение перед изучением § 6

Теоретический материал

- угол между плоскостями (10 класс)
- перпендикулярность плоскостей (10 класс)
- многоугольник и его элементы (8 класс)

Задачи

207. Гипотенуза AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α, а вершина B удалена от этой плоскости на 1,5 см. Найдите угол между плоскостями ABC и α, если площадь треугольника ABC равна 9 см^2.

208. Лучи OA, OB и OC имеют общее начало, причем $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = 60°$. Найдите угол между прямой OA и плоскостью BOC.

Тестовое задание для самопроверки № 1

1. Даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Какая величина всегда выражается разностью $z_2 - z_1$?

   а) одна из координат середины отрезка AB;

   б) длина отрезка AB;

   в) одна из координат вектора $\overrightarrow{AB}$;

   г) длина вектора $\overrightarrow{AB}$.

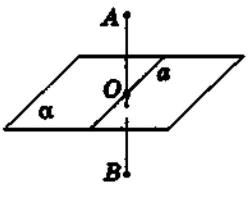


Рис. 69

2. На рисунке 69 $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, $AO = OB$. Среди данных утверждений выберите неверное.

   а) точки A и B симметричны относительно точки O;

   б) точки A и B симметричны относительно прямой a;

   в) точки A и B симметричны относительно плоскости α;

   г) параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$ переводит плоскость α в себя.

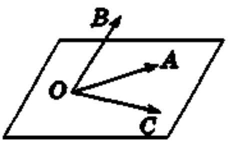


Рис. 70

3. На рисунке 70 точка B не лежит в плоскости AOC. Закончите предложение так, чтобы получилось верное утверждение. Векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ являются...

   а) коллинеарными; в) сонаправленными;

   б) компланарными; г) некомпланарными.

4. Найдите координаты середины отрезка с концами $M(-7;1;4)$ и $N(-1;-3;0)$.

а) $(-4;-1;4)$; б) $(-4;-1;2)$; в) $(-4;-2;2)$; г) $(-3;2;2)$.

5. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$.

а) $\vec{0}$; в) $\overrightarrow{DF}$;

б) $\overrightarrow{CF}$; г) $\overrightarrow{CE}$.

6. Точка O не принадлежит плоскости α. При гомотетии с центром O плоскость α переходит в плоскость β, отличную от α. Прямая a лежит в плоскости α. Каково взаимное расположение прямой a и плоскости β?

а) $a \parallel \beta$; в) a принадлежит β;

б) a пересекает β; г) $a \perp \beta$.

7. Прямая AB перпендикулярна плоскости BCD. Среди данных пар векторов выберите пару векторов, скалярное произведение которых равно нулю.

а) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 71). При параллельном переносе отрезок A_1B переходит в отрезок D_1C. Назовите плоскость, в которую при таком переносе переходит плоскость AA_1B_1.

а) DB_1B; в) AA_1C_1;

б) DCC_1; г) ABC.

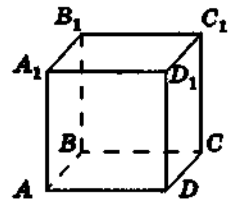


Рис. 71

9. Плоскость α является плоскостью симметрии треугольника ABC, не лежащего в данной плоскости. Среди данных утверждений выберите неверное.

а) $(ABC) \perp \alpha$;

б) треугольник ABC равнобедренный;

в) треугольник ABC имеет центр симметрии;

г) треугольник ABC имеет ось симметрии.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 71). Найдите $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DD_1}$.

а) $\overrightarrow{A_1C}$; в) $\overrightarrow{B_1D}$;

б) $\overrightarrow{BD_1}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$.

11. Среди данных геометрических преобразований выберите то, при котором одна из двух скрещивающихся прямых может переходить в другую:

а) параллельный перенос; в) поворот;
б) зеркальная симметрия; г) гомотетия.

12. При параллельном переносе вектор $\overrightarrow{AB}$ переходит в вектор $\overrightarrow{DC}$. Среди данных утверждений выберите то, которое может быть неверным.

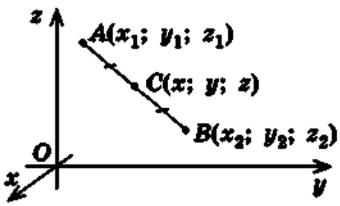
а) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$;
б) середины отрезков AC и BD совпадают;
в) векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DC}$ компланарны;
г) $ABCD$ — параллелограмм.

Итоги главы I

Итоговый обзор главы I

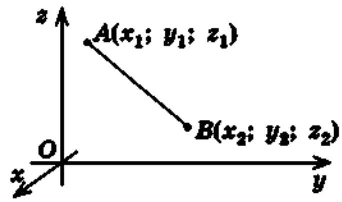
Декартовы координаты в пространстве

Координаты середины отрезка



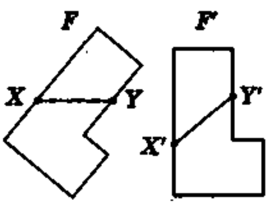
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

Расстояние между точками



$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

Движения в пространстве



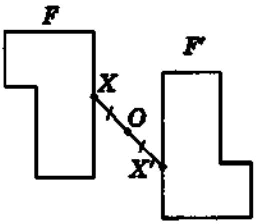
Движением называется преобразование одной фигуры в другую, при котором сохраняются расстояния между точками

Две фигуры называются ***равными***, если они переводятся одна в другую движением

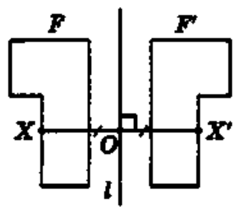
Движение в пространстве переводит прямые в прямые, отрезки — в равные отрезки, углы — в равные углы, плоскости — в плоскости

Виды движений

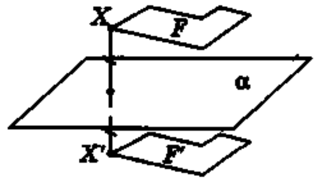
Симметрия относительно точки (центральная)



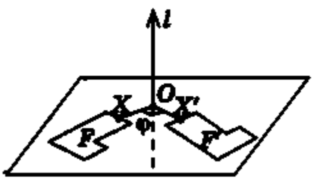
Симметрия относительно прямой (осевая)



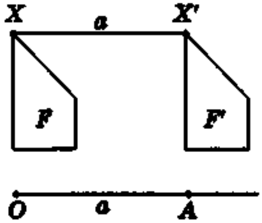
Симметрия относительно плоскости (зеркальная)

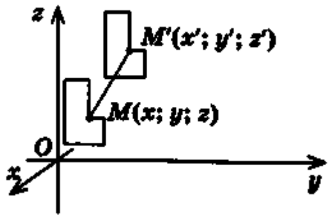


Поворот в пространстве вокруг прямой



Параллельный перенос

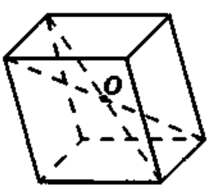




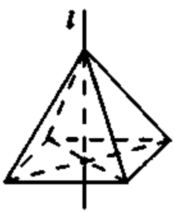
$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$
$$z' = z + c$$

Элементы симметрии фигуры

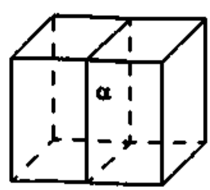
Центр симметрии



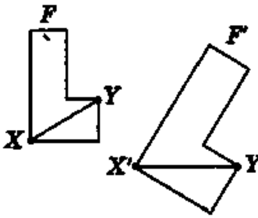
Ось симметрии



Плоскость симметрии



Преобразование подобия в пространстве



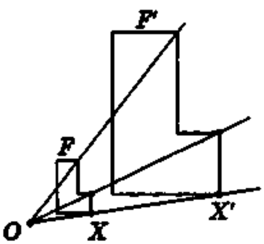
$X'Y' = kXY$

$F' \backsim F$

Преобразованием подобия (***подобием***) называется такое преобразование фигуры F в фигуру F', при котором расстояния между точками изменяются в одном и том же отношении k ($k>0$)

Число $k>0$ называют ***коэффициентом подобия***, а фигуры F и F' — ***подобными***

Преобразование подобия переводит прямые в прямые, отрезки — в отрезки, плоскости — в плоскости, а также сохраняет углы между лучами



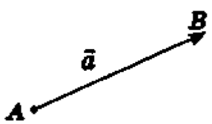
Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k ($k>0$) называется такое преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка X фигуры F переходит в точку X' фигуры F', лежащую на луче OX, и $OX' = kOX$

Число k называют ***коэффициентом гомотетии***, а фигуры F и F' — ***гомотетичными***

Основное свойство гомотетии: гомотетия является преобразованием подобия

Гомотетия переводит плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость или в себя

Векторы



$\bar{a} = \overline{AB}$

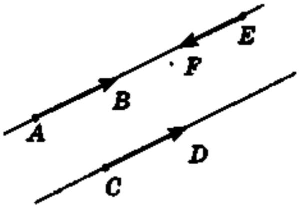
Вектором называется направленный отрезок

Координатами вектора с началом в точке $A(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке $B(x_2; y_2; z_2)$ называются числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ и $a_3 = z_2 - z_1$:

$$\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$$

Длина (***модуль***) ***вектора*** $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ вычисляется по формуле $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Окончание таблицы

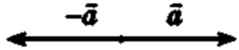


$\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$,
$\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{EF}$

Ненулевые векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых

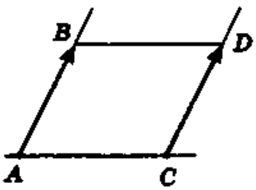
Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ***сонаправлены***

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$ ***противоположно направлены***



$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

Противоположными векторами называются два противоположно направленных вектора одинаковой длины



Два вектора называются ***равными***, если они совмещаются параллельным переносом

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один

Критерии равных векторов:

1) векторы сонаправлены и имеют равные длины;

2) векторы имеют равные координаты

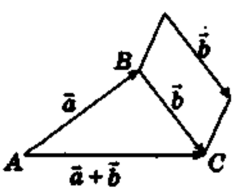
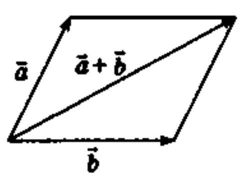
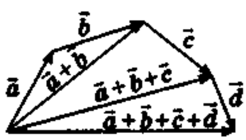
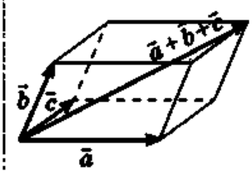
Операции с векторами

Сложение векторов

Суммой векторов $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ называется вектор $\vec{c}(c_1;c_2;c_3)$ с координатами $c_1=a_1+b_1$, $c_2=a_2+b_2$, $c_3=a_3+b_3$, то есть

$$\overrightarrow{(a_1;a_2;a_3)}+\overrightarrow{(b_1;b_2;b_3)}=\overrightarrow{(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)}$$

Построение суммы векторов

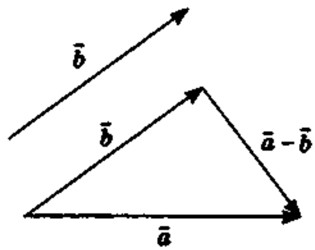
Правило треугольника	Правило параллелограмма	Правило многоугольника	Правило параллелепипеда
			

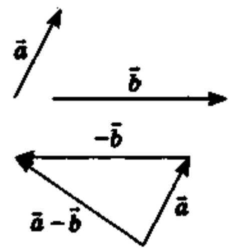
Вычитание векторов

Разностью векторов $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ **называется такой вектор** $\vec{c}(c_1;c_2;c_3)$, **сумма которого с вектором** $\vec{b}$ **равна вектору** $\vec{a}$, **то есть** $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$:

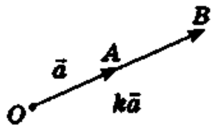
$$\overline{(a_1;a_2;a_3)}-\overline{(b_1;b_2;b_3)}=\overline{(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)}$$

Построение разности векторов



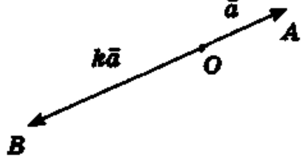


Умножение вектора на число



$k>0$

Вектор $k\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$



$k<0$

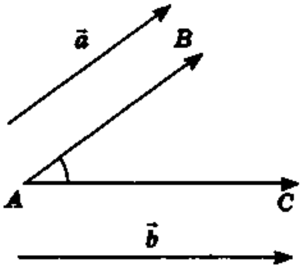
Вектор $k\vec{a}$ противоположно направлен к вектору $\vec{a}$

Произведением вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ ***на число k*** **(или произведением числа k на вектор $\vec{a}$) называется вектор** $\overline{(ka_1;ka_2;ka_3)}$, **который обозначают** $k\vec{a}$ **или** $\vec{a}k$:

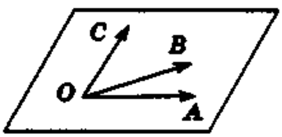
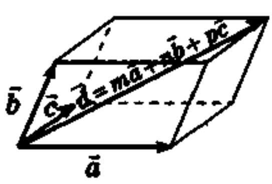
$$|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$$

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарные векторы, то существует число k такое, что $\vec{b}=k\vec{a}$, и наоборот: если для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{b}=k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны

У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны, и наоборот: если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то эти векторы коллинеарны

Скалярное произведение векторов	
 $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\angle BAC$	***Скалярным произведением векторов*** $\vec{a}\left(a_1;a_2;a_3\right)$ и $\vec{b}\left(b_1;b_2;b_3\right)$ называется число $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Обычно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$ Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется ***скалярным квадратом*** вектора $\vec{a}$: $\vec{a}^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2=\left\|\vec{a}\right\|^2$ Скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ ***Свойство и признак перпендикулярных векторов:*** если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, и наоборот: если для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$

Компланарные векторы

 $A,B,C,O\in\alpha$	Ненулевые векторы называются ***компланарными***, если при откладывании их от одной и той же точки они лежат в одной плоскости
	Любой вектор $\vec{d}$ можно разложить по трем некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то есть представить в виде $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, где m, n и p — некоторые числа, причем такое разложение единственно

Контрольные вопросы к главе I

1. Докажите формулы координат середины отрезка и расстояния между точками в пространстве.

2. Опишите виды симметрии в пространстве. Как построить точку, симметричную данной точке относительно данной плоскости?

3. Опишите параллельный перенос в пространстве. Какими формулами он задается?

4. Опишите преобразование подобия и гомотетию в пространстве.

5. Какие понятия и свойства, связанные с векторами, в стереометрии совпадают с планиметрическими? Дайте соответствующие определения, запишите формулы.

6. Какие понятия и свойства, связанные с векторами, в стереометрии отличаются от планиметрических? Дайте соответствующие определения, запишите формулы.

7. Какие векторы называются компланарными? Сформулируйте и докажите теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Дополнительные задачи к главе I

209. Найдите расстояние от точки $A(-4;1;3)$ до точек, симметричных ей относительно:

а) координатных плоскостей;

б) начала координат;

в) осей координат.

210. Векторы $\vec{a}(-7;1;4)$ и $\vec{b}(-1;4;2)$ отложены от общего начала. Найдите расстояние между концами этих векторов.

211. При движении точка $A(x;y;z)$ переходит в точку B. Приведите пример такого движения, если:

а) $B(-x;-y;z)$;

б) $B(x;-y;z)$;

в) $B(y;x;z)$.

212. Докажите, что две плоскости, симметричные относительно точки, через которую они не проходят, параллельны.

213. Основание четырехугольной пирамиды $PABCD$ — квадрат $ABCD$, а все боковые ребра равны. При симметрии относительно плоскости основания точка P переходит в точку P_1 (рис. 72). Докажите, что:

а) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PP_1}$;

б) $\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{BP_1}=\overrightarrow{DB}$.

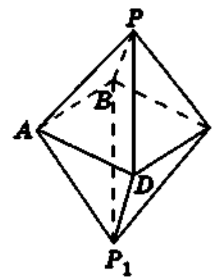


Рис. 72

214. Векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{a}-3\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

215. Даны точки $A(-4;0;3)$ и $B(1;4;8)$. Под каким углом отрезок AB виден из начала координат?

216. Докажите, что точки $A(-1;2;1)$, $B(5;4;-2)$, $C(1;-1;7)$ являются вершинами равнобедренного треугольника.

217. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если $A(1;1;-1)$, $B(-3;1;3)$, $C(-7;5;3)$, $D(-7;9;-1)$.

218. Лучи OA, OB и OC попарно перпендикулярны. Докажите векторным методом, что треугольник ABC остроугольный.

Задачи повышенной сложности

219. В плоскости Oxy найдите точку C, лежащую на прямой AB, если $A(1;-7;7)$, $B(-3;3;-7)$. Какая из точек: A, B или C — лежит между двумя другими?

220. Докажите с помощью векторов, что для любых чисел a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 выполняется неравенство

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le (a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)$$

(неравенство Коши — Буняковского — Шварца).

221. Дан куб, в котором три грани закрашены одним цветом. Сколько плоскостей симметрии может иметь такой куб?

222. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки K, M и N принадлежат боковым ребрам AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и KMN лежат на одной прямой.

223. Все ребра тетраэдра $PABC$ равны a. Найдите векторным методом угол и расстояние между AB и PC.

224. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найдите векторным методом расстояние и угол между прямыми:

а) AC и B_1D; б) A_1D и D_1C.

225. В тетраэдре $PABC$ точка O — точка пересечения медиан треугольника ABC. На ребрах PA, PB, PC взяты точки M, N, K так, что $PM=\frac{1}{3}PA$, $PN=\frac{1}{4}PB$, $PK=\frac{1}{2}PC$. Отрезок PO пересекается с плоскостью MNK в точке S. Найдите векторным методом отношение $PS:SO$.

226. Из вершины параллелепипеда проведены три диагонали его граней. На этих диагоналях (как на ребрах) построили новый параллелепипед. Докажите, что противолежащая вершина данного параллелепипеда является серединой диагонали построенного параллелепипеда.

227. Дан прямоугольный параллелепипед, диагонали которого пересекаются в точке O. Три ребра параллелепипеда, имеющие общую вершину, видны из точки O под углами α_1, β_1, γ_1. Три диагонали граней, выходящие из одной вершины, видны из точки O под углами α_2, β_2, γ_2. Докажите, что:

а) $\cos\alpha_1+\cos\beta_1+\cos\gamma_1=1$; б) $\cos\alpha_2+\cos\beta_2+\cos\gamma_2=-1$.

228. Дан тетраэдр $PABC$; b_1, b_2, b_3 — биссектрисы углов BPC, CPA, APB соответственно. Докажите, что при условии $b_1\perp b_2$ каждая из биссектрис b_1, b_2 перпендикулярна b_3.

229. Найдите количество решений уравнения

$\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}=a$ при условии:

а) $a=1$; б) $a=\sqrt{2}$; в) $a=2$.

Историческая справка

Эпоха великих географических открытий и обусловленное ими развитие производства, торговли, мореплавания стали толчком к возникновению аналитической геометрии. Этот раздел геометрии, основанный на введении прямоугольных координат и установлении соответствия между алгебраическими уравнениями и геометрическими фигурами, стал итогом многолетних математических исследований.

Пьер Ферма

Создателями аналитической геометрии считают французских ученых Рене Декарта (1596–1650) и Пьера Ферма (1601–1665). Ферма в начале XVII века, занимаясь восстановлением утраченных работ древнегреческих ученых, в частности Аполлония Пергского, определил общий подход к изучению геометрических мест точек через алгебраические уравнения. Открытие Декартом системы координат на плоскости позволило создать математический аппарат для воплощения идей аналитической геометрии. Но как Ферма, так и Декарт только говорили о возможности использования координат в пространстве. Трехмерную систему координат первым начал применять французский математик Алексис Клод Клеро (1713–1765), а систематическое изложение аналитической геометрии в пространстве представил в 1748 году выдающийся ученый Леонард Эйлер.

Алексис Клод Клеро

В историю аналитической геометрии вписаны также имена украинских ученых. Уроженец Винничины Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889) учился математике в Париже, у ведущих ученых своего времени — Коши, Лежандра, Пуассона, Лапласа, а поздее работал в Петербурге. Он был автором около ста работ по математическому анализу, алгебре, геометрии, теории чисел и теории вероятностей. Так, известное вам неравенство $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ является векторным представлением математического факта, обобщенного Буняковским на основании идей его учителя Коши, и получило название «неравенство Коши — Буняковского».

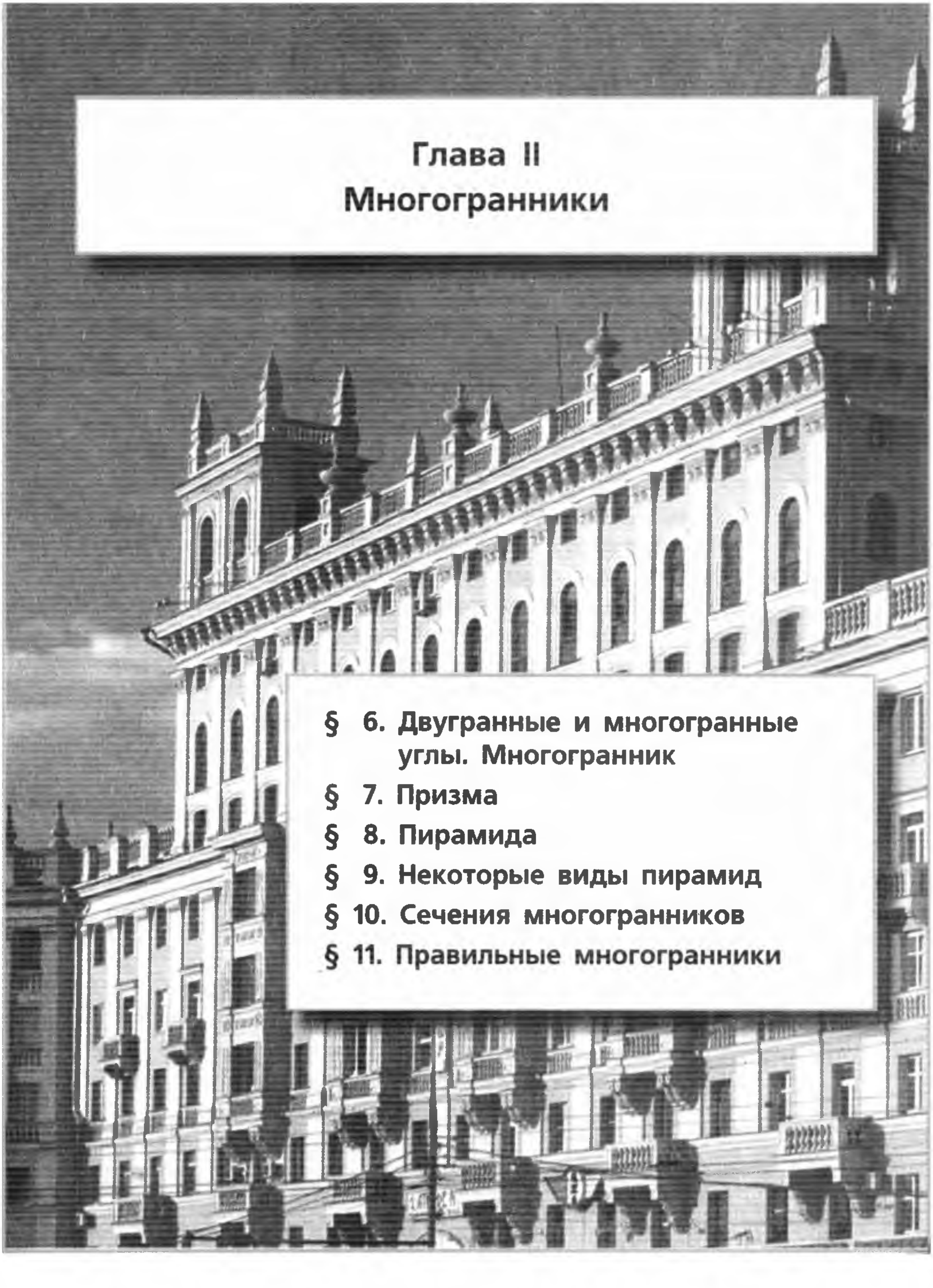
В. Я. Буняковский

Тематика сообщений и рефератов к главе I

1. Расстояния между прямыми и плоскостями в пространстве.
2. Применение векторно-координатного метода к изображению пространственных фигур на плоскости. Компьютерная графика.
3. Прикладные задачи оптимизации. Линейное программирование.
4. История развития аналитической геометрии.
5. Жизнь и научное наследие П. Ферма и В. Я. Буняковского.

Рекомендованные источники информации

1. Глейзер Г. И. История математики в школе. IX–X кл. — М.: Просвещение, 1982.
2. Потоскуев Е. В. Векторы и координаты как аппарат решения геометрических задач: Учеб. пособие. — М.: Дрофа, 2008.
3. Вивальнюк Л. М. Елементи лінійного програмування. — К.: Вища шк., 1975.
4. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. Т. 1. Стереометрия, преобразования пространства. — М.: МЦНМО, 2006.
5. Вевз Г. П. Методика розв'язування стереометричних задач: Посібник для вчителя. — К.: Рад. шк., 1988.
6. Фокс А., Прат М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. — М.: Мир, 1982.
7. Беккер Б. М., Некрасов В. Б. Применение векторов для решения задач. — С.-Петербург: НПО «Мир и семья-95», 1997.
8. Кушнир И. А. Координатный и векторный методы решения задач. — К.: Астарта, 1996.
9. Кушнир И. А. Векторные методы решения задач. — К.: Оберіг, 1994.
10. Шестаков С. А. Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии. — М.: МЦНМО, 2005.



Глава II
Многогранники

§ 6. Двугранные и многогранные углы. Многогранник

§ 7. Призма

§ 8. Пирамида

§ 9. Некоторые виды пирамид

§ 10. Сечения многогранников

§ 11. Правильные многогранники

Геометрия — это настоящая естественная наука, только более простая, а значит, и более совершенная, чем любая другая.

Огюст Конт, французский философ

Среди твердых тел естественного и искусственного происхождения особенно важную роль играют многогранники. Подобно многоугольникам на плоскости, они наглядно демонстрируют, как объединение известных свойств простейших геометрических фигур рождает новые, до сих пор неизвестные факты. Недаром, говоря о всесторонне одаренном человеке, мы часто отмечаем многогранность его таланта.

Для успешного изучения многогранников необходимо восстановить в памяти свойства многоугольников, а также основные теоремы о расположении прямых и плоскостей в пространстве. Именно на этом теоретическом материале базируются основные теоремы данной главы.

Свойства многогранников находят широкое практическое применение в искусстве и строительстве, кристаллографии и компьютерной графике. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье справедливо отмечал, что шедевры старинной архитектуры появились только благодаря законам геометрии. И значительную часть этих бесценных для практической деятельности человека законов таят в себе именно многогранники.

§ 6. ДВУГРАННЫЕ И МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ. МНОГОГРАННИК

6.1. Двугранный угол

Понятие двугранного угла рассматривалось нами в курсе геометрии 10 класса. Вспомним, как вводилось это понятие.

В планиметрии углом называется фигура, состоящая из двух лучей с общим началом. По аналогии в пространстве можно рассматривать две полуплоскости с общей граничной прямой. Если мы перегнем по прямой лист бумаги, то получим модель такой пространственной фигуры.

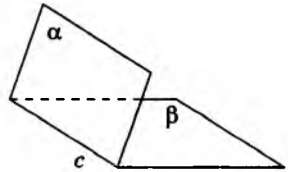


Рис. 73. Двугранный угол

Рис. 74. Модели двугранных углов

Определение

Двугранным углом называется фигура, состоящая из двух полуплоскостей (***граней двугранного угла***) с общей граничной прямой (***ребром двугранного угла***).

На рисунке 73 изображен двугранный угол с гранями α и β и ребром c. Наглядное представление о двугранных углах дают полураскрытая книга или папка, двускатная крыша здания, две соседние стены комнаты и т. д. (рис. 74).

Измерение двугранных углов сводится к измерению углов между лучами, выполнить которое можно с помощью дополнительных построений следующим образом.

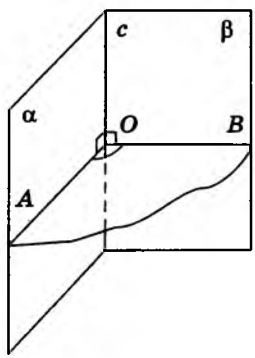


Рис. 75. Линейный угол двугранного угла

Через точку O на ребре данного двугранного угла (рис. 75) проведем плоскость, перпендикулярную ребру угла. Она пересекает грани угла по лучам OA и OB, перпендикулярным ребру данного угла. Угол AOB, образованный этими лучами, называют ***линейным углом данного двугранного угла***. Часто при построении линейного угла двугранного угла плоскость, перпендикулярную ребру, не строят, ограничиваясь проведением

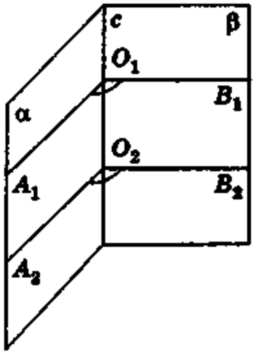


Рис. 76. К обоснованию равенства линейных углов двугранного угла

в гранях данного угла лучей с общим началом, перпендикулярных ребру угла.

Очевидно, что двугранный угол имеет множество линейных углов. Покажем, что ***все линейные углы двугранного угла равны.***

Действительно, пусть $A_1O_1B_1$ и $A_2O_2B_2$ — линейные углы двугранного угла (рис. 76). Параллельный перенос, который переводит точку O_1 в точку O_2, переводит угол $A_1O_1B_1$ в угол $A_2O_2B_2$. Так как при параллельном переносе величины углов сохраняются, то $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$. Это позволяет дать следующее определение.

Определение

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

Из доказанного следует, что градусная мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла.

Согласно определению угла в планиметрии, градусная мера двугранного угла лежит в пределах от 0° до 180° (случаи, когда грани двугранного угла совпадают или принадлежат одной плоскости, как правило, не рассматриваются). Как и среди углов на плоскости, среди двугранных углов различают ***острые*** (меньше 90°), ***прямые*** (те, что равны 90°) и ***тупые*** (больше 90° и меньше 180°).

Итак, ***для обоснования градусной меры двугранного угла необходимо построить его линейный угол, то есть указать на гранях данного двугранного угла два луча с общим началом, перпендикулярных ребру угла.***

Один из способов построения таких лучей описан в решении следующей задачи.

Задача

На одной из граней двугранного угла, равного 45°, лежит точка, удаленная на 8 см от ребра угла. Найдите расстояние от этой точки до другой грани угла.

Решение

Пусть точка A принадлежит грани α данного двугранного угла (рис. 77). Проведем $AB \perp \beta$; AB — расстояние от точки A до грани β. Проведем $AC \perp c$; AC — расстояние от точки A до ребра c;

по условию $AC=8$ см. Отрезок BC — проекция наклонной AC на плоскость β. По теореме о трех перпендикулярах $BC\perp c$. Значит, угол ACB — линейный угол двугранного угла; по условию $\angle ACB=45°$. Из треугольника ABC ($\angle B=90°$)

$$\sin C=\frac{AB}{AC},\ AB=AC\cdot\sin C=8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}\ (\text{см}).$$

Ответ: $4\sqrt{2}$ см.

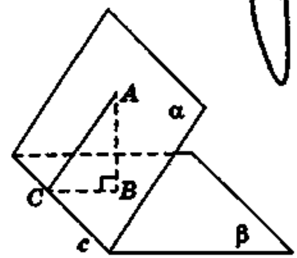


Рис. 77

Говорят, что точка M лежит ***внутри двугранного угла***, если существует линейный угол данного двугранного угла, во внутренней области которого лежит точка M. Так, на рисунке 77 во внутренней области данного двугранного угла лежит любая внутренняя точка отрезка AB. Множество всех точек, лежащих внутри двугранного угла, называется ***внутренней областью двугранного угла***.

6.2. Трехгранный и многогранный углы

Рассмотрим лучи a, b и c с общим началом P, не лежащие в одной плоскости (рис. 78). Каждая пара этих лучей определяет плоский угол с вершиной P, а все они вместе — пространственную фигуру, которая называется трехгранным углом.

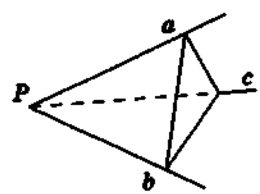


Рис. 78. Трехгранный угол

Определение

Трехгранным углом называется фигура, состоящая из трех плоских углов с общей вершиной и попарно общими сторонами, не лежащими в одной плоскости.

На рисунке 78 трехгранный угол с вершиной P образован плоскими углами (ab), (bc) и (ac). Эти плоские углы называются ***гранями трехгранного угла***, а их стороны a, b и c — ***ребрами трехгранного угла***. Каждые две грани трехгранного угла определяют полуплоскости, в которых они лежат, причем эти полуплоскости ограничены общей прямой — ребром трехгранного угла. Двугранные углы, образованные такими полуплоскостями, называются ***двугранными углами трехгранного угла***.

Опорная задача
(неравенство треугольника для трехгранного угла)

Любой плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов. Докажите.

Решение

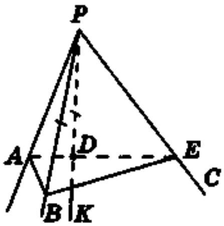


Рис. 79. К доказательству неравенства треугольника для трехгранного угла

Пусть PA, PB и PC — ребра трехгранного угла с вершиной P, а угол APC — наибольший из плоских углов данного угла (рис. 79). В грани APC проведем луч PK так, чтобы $\angle APK = \angle APB$, и отложим на этом луче отрезок PD, равный PB. Тогда $\triangle PAD = \triangle PAB$ по двум сторонам и углу между ними, откуда следует, что $AB = AD$.

Пусть лучи AD и PC пересекаются в точке E. Тогда из треугольника ABE по неравенству треугольника $AE < AB + BE$, или $AD + DE < AB + BE$.

Так как $AB = AD$, имеем $DE < BE$. В треугольниках DEP и BEP сторона EP общая, $PB = PD$, $DE < BE$.

Из теоремы косинусов для этих треугольников следует, что $\cos\angle BPE < \cos\angle DPE$, откуда $\angle BPE > \angle DPE$. Тогда $\angle BPE + \angle APD > \angle DPE + \angle APD$. Но $\angle APD = \angle APB$, $\angle DPE + \angle APD = \angle APE$, поэтому $\angle BPE + \angle APB > \angle APE$, то есть $\angle BPC + \angle APB > \angle APC$, что и требовалось доказать.

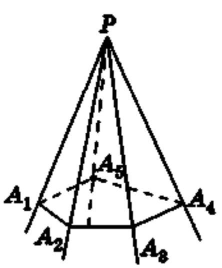


Рис. 80. Выпуклый пятигранный угол

Аналогично трехгранному углу определяют четырехгранный, пятигранный и вообще n-гранный угол при $n > 3$. В школьном курсе мы будем рассматривать только выпуклые многогранные углы — углы, лежащие по одну сторону от плоскости любой своей грани или в самой этой плоскости. Например, на рисунке 80 изображен выпуклый пятигранный угол с вершиной P.

Опорная задача

(о сумме плоских углов выпуклого многогранного угла)

Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше **360°. Докажите.**

Решение

Пусть некоторая плоскость* пересекает ребра многогранного угла с вершиной P в точках A_1, A_2, ..., A_n. Рассмотрим n трехгранных углов с вершинами A_1, A_2, ..., A_n. Для каждого из этих углов, вследствие неравенства треугольника для трехгранного угла, имеем:

$$\angle A_nA_1A_2 < \angle A_nA_1P + \angle A_2A_1P,$$
$$\angle A_1A_2A_3 < \angle A_1A_2P + \angle A_3A_2P,$$
$$\ldots$$
$$\angle A_{n-1}A_nA_1 < \angle A_{n-1}A_nP + \angle A_1A_nP.$$

Заметим, что сумма левых частей данных неравенств является суммой углов выпуклого n-угольника $A_1A_2...A_n$, то есть равна $180°(n-2)$. Сумма правых частей является суммой углов при основаниях треугольников A_1PA_2, A_2PA_3, ..., A_nPA_1, то есть равна $180°\cdot n - S$, где S — сумма углов этих треугольников при вершине P, которая и является суммой плоских углов данного многогранного угла. Итак, сложив полученные неравенства, имеем $180°(n-2) < 180°n - S$, откуда $S < 360°$.

6.3. Многогранник

Среди пространственных фигур, изучаемых в курсе стереометрии, особое место занимают ***геометрические тела***, или просто ***тела***. Наглядно геометрическое тело можно представить как конечную часть пространства, занятую физическим телом и ограниченную поверхностью*.

Поверхность многих предметов, окружающих нас в повседневной жизни, состоит из плоских многоугольников: например, спичечный коробок, скворечник и т. д. (рис. 81). Такие предметы дают представление о многогранниках.

Определение

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

* Определение геометрического тела будет дано в п. 14.3.

Рис. 81. Модели многогранников

Плоские многоугольники, из которых состоит поверхность многогранника, называются ***гранями многогранника***. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно ***ребрами*** и ***вершинами многогранника***. Каждое ребро многогранника принадлежит ровно двум его граням. При этом никакие две ***соседние грани*** (то есть грани, имеющие общее ребро) не лежат в одной плоскости. Например, многогранник на рисунке 82, *а* имеет восемь граней, каждая из которых является треугольником, 12 ребер и 6 вершин. Грани многогранника, лежащие в параллельных плоскостях, называются ***параллельными гранями***.

Так же как и многоугольники, многогранники делятся на выпуклые и невыпуклые.

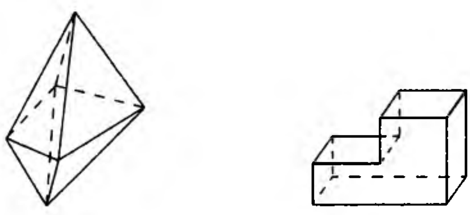
Определение

Выпуклым многогранником называется многогранник, все точки которого лежат по одну сторону от плоскости каждой его грани или в самой этой плоскости.

В противном случае многогранник называется ***невыпуклым***.

Так, многогранник на рисунке 82, *а* является выпуклым, а многогранник на рисунке 82, *б* — невыпуклым (объясните почему). Примерами выпуклых многогранников являются уже известные вам призма, параллелепипед, тетраэдр. В дальнейшем мы будем изучать свойства этих многогранников подробнее.

Двугранный угол, образованный полуплоскостями, в которых лежат соседние грани данного выпуклого многогранника, называется



а б

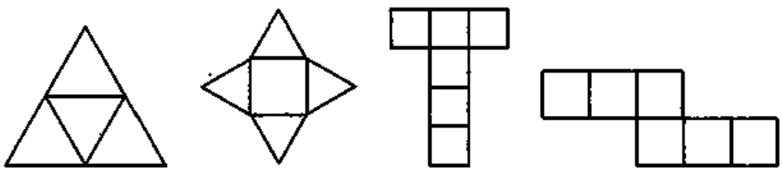
Рис. 82. Выпуклый и невыпуклый многогранники

двугранным углом выпуклого многогранника. Заметим, что данный многогранник лежит во внутренней области этого двугранного угла.

Если поверхность модели многогранника, изготовленной из плотной бумаги, разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскости, получим многоугольник, который называется ***разверткой многогранника*** (или разверткой поверхности многогранника).

На рисунке 83 даны развертки некоторых многогранников: *а* — правильного тетраэдра, *б* — четырехугольной пирамиды, *в*, *г* — куба.

Площадью полной поверхности (или просто площадью поверхности) многогранника называется сумма площадей всех его граней. Очевидно, что площадь поверхности многогранника равна площади его развертки.



а б в г

Рис. 83. Развертки многогранников

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

230. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 84). Назовите ребро и один из линейных углов двугранного угла с гранями:

а) B_1BC и ABC;

б) A_1AO и D_1DO;

в) B_1AC и ABC;

г) A_1BD и BDC.

Какие из данных углов острые; прямые; тупые?

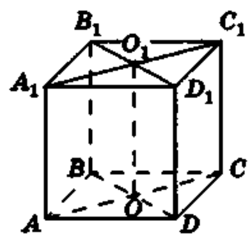


Рис. 84

231. Один из двугранных углов, образованных при пересечении двух плоскостей, равен φ. Какую градусную меру может иметь угол между данными плоскостями?

232. Возможен ли трехгранный угол, плоские углы которого равны:

а) 40°, 50° и 100°;   в) 150°, 160° и 170°?

б) 20°, 60° и 80°;

233. Возможен ли выпуклый четырехгранный угол, плоские углы которого равны:

а) 90°;   б) 60°, 80°, 100° и 130°?

234. Сколько трехгранных углов имеет тетраэдр; треугольная призма; куб?

235. Многогранник имеет m вершин и n ребер. Сколько у него двугранных углов? Верно ли, что данный многогранник имеет m трехгранных углов? Выскажите предположение.

МОДЕЛИРУЕМ*

236*. Смоделируйте многогранник, который:

а) не является тетраэдром, но все его грани — треугольники;

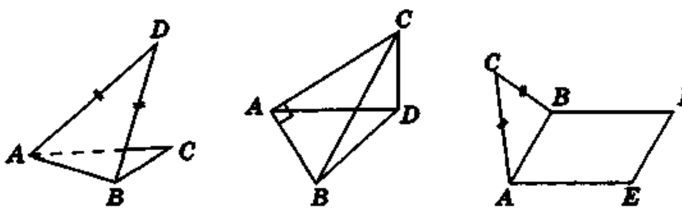
б) не является кубом, но четыре его грани — квадраты.

→ **237*.** Изготовьте из плотной бумаги модель правильного тетраэдра. Разрежьте ее по ребрам так, чтобы получить развертку, отличную от развертки на рисунке 83, *а*. Равны ли площади двух разных разверток данного тетраэдра? Ответ обоснуйте.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

238*. По данным рисунка 85, *а–в* постройте и обоснуйте линейный угол двугранного угла с ребром AB.



$\triangle ABC$ правильный $CD \perp (ABD)$ $ABDE$ — квадрат

а   б   в

Рис. 85

* Здесь и далее в практических заданиях на склеивание разверток многогранников необходимо учитывать припуски материала на склеивание.

239˙ На одной из граней двугранного угла взята точка.

а) Найдите величину угла, если он является острым, а данная точка удалена от ребра угла на 12 см и от плоскости другой грани на $6\sqrt{3}$ см.

б) Найдите расстояние от данной точки до плоскости другой грани, если двугранный угол равен 30°, а расстояние от данной точки до ребра угла составляет 14 см.

→ **240**˙ Равносторонний треугольник ABC со стороной $2\sqrt{6}$ см лежит в одной из граней двугранного угла с ребром AC. Найдите расстояние от точки B до плоскости другой грани, если двугранный угол равен 45°.

241. На разных гранях двугранного угла лежат точки A и B, удаленные от граней, которым они не принадлежат, на 14 см и 21 см соответственно. Во сколько раз расстояние от точки B до ребра угла больше, чем расстояние от точки A до ребра угла?

→ **242.** На одной из граней острого двугранного угла лежат две точки, первая из которых удалена от ребра угла на 7 см, а вторая — на 21 см. Найдите расстояние от второй точки до плоскости другой грани угла, если первая точка удалена от этой грани на 4 см.

243. Все плоские углы трехгранного угла прямые. Докажите, что все его двугранные углы также прямые.

→ **244.** Все плоские углы выпуклого многогранного угла прямые. Сколько граней может иметь такой угол?

245. Два плоских угла трехгранного угла прямые, а третий равен 60°. На грани, содержащей наименьший плоский угол, лежит точка M, удаленная от каждого из ребер этой грани на 4 см. Найдите расстояние от точки M до третьего ребра угла.

246. Все плоские углы трехгранного угла прямые. На ребрах угла лежат точки A, B и C, удаленные от его вершины на $3\sqrt{2}$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

247. Нарисуйте развертку:

а) правильного тетраэдра с ребром 4 см;

б) прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 2 см, 3 см и 5 см.

Найдите площадь полной поверхности данных фигур.

Уровень Б

✸ **248** (опорная). ***Отношение площадей поверхностей подобных многогранников равно квадрату коэффициента подобия.*** Докажите.

249. Плоскость γ пересекает грани двугранного угла, равного $45°$, по параллельным прямым, удаленным от ребра угла на $3\sqrt{2}$ см и 7 см. Найдите расстояние между этими прямыми.

→ **250.** В гранях двугранного угла проведены две прямые, параллельные ребру угла. Найдите величину двугранного угла, если данные прямые удалены от ребра на 7 см и 8 см, а расстояние между ними равно 13 см.

251. Ортогональная проекция прямой l на одну из граней двугранного угла перпендикулярна ребру угла. Докажите, что проекция прямой l на другую грань также перпендикулярна ребру угла.

252. Из точек A и C, лежащих на разных гранях двугранного угла, проведены к его ребру перпендикуляры $AB=7$ см и $CD=15$ см. Найдите величину двугранного угла, если $BD=84$ см, $AC=85$ см.

→ **253.** Из точек A и C, лежащих на разных гранях двугранного угла величиной $45°$, проведены к его ребру перпендикуляры $AB=4\sqrt{2}$ см и $CD=1$ см. Найдите длину отрезка AC, если $BD=12$ см.

254 (опорная). Докажите, что:

а) ***каждый плоский угол трехгранного угла больше разности двух других плоских углов;***

б) ***каждый плоский угол выпуклого многогранного угла меньше суммы остальных плоских углов.***

→ **255.** Определите, в каких пределах может изменяться величина плоского угла трехгранного угла, если два других его плоских угла равны:

а) $60°$ и $80°$; б) $90°$ и $100°$.

256. Все плоские углы трехгранного угла прямые. Найдите расстояние от его вершины до точки, лежащей внутри угла* и удаленной:

а) от его граней на 2 см, 3 см и 6 см;

б) от его ребер на 20 см, 31 см и 33 см.

257. Каждый из плоских углов трехгранного угла равен $60°$. Найдите его двугранные углы.

→ **258.** Плоские углы трехгранного угла равны $60°$, $60°$ и $90°$. Докажите, что плоскость, отсекающая на ребрах угла равные отрезки, перпендикулярна плоскости наибольшего плоского угла.

* Если по одну сторону от плоскости любой грани данного угла лежит данная точка и остальные грани угла, то говорят, что точка лежит внутри выпуклого многогранного угла.

259. Разверткой треугольной пирамиды является равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 10 см. Найдите длины всех ребер и площадь полной поверхности пирамиды.

Уровень В

260. В одной из граней двугранного угла проведена прямая, образующая с его другой гранью угол 45°, а с ребром — угол 60°. Найдите величину двугранного угла.

→ **261.** Двугранный угол равен 60°. В одной из граней угла проведена прямая, образующая с ребром угол 45°. Найдите угол наклона данной прямой к другой грани двугранного угла.

262. У трехгранного угла с ребрами OA, OB и OC двугранный угол при ребре OC прямой, двугранный угол при ребре OB равен α ($\alpha < 90°$), а плоский угол BOC равен β ($\beta < 90°$). Найдите плоские углы AOB и AOC.

263. У трехгранного угла два плоских угла равны 45°, а двугранный угол между ними прямой. Найдите величину третьего плоского угла.

→ **264.** Плоские углы трехгранного угла равны 60°, 60° и 90°. Найдите величины двугранных углов, прилежащих к наибольшему плоскому углу.

265. Докажите, что не существует многогранника, который имеет ровно семь ребер.

Повторение перед изучением § 7

Теоретический материал

- правильный многоугольник (9 класс)
- свойства и признаки параллелограмма (8 класс)
- перпендикулярность плоскостей (10 класс)

Задачи

266. Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 не лежат в одной плоскости. Докажите, что:

а) $CC_1 \parallel DD_1$; б) плоскости BCC_1 и ADD_1 параллельны.

267. Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 не лежат в одной плоскости. Задайте вектор параллельного переноса, переводящего треугольник BCC_1 в треугольник ADD_1.

§ 7. ПРИЗМА

7.1. Призма и ее элементы

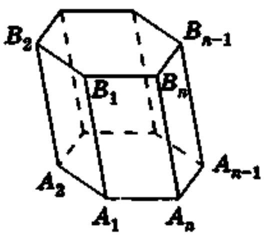


Рис. 86. Призма

Рассмотрим два плоских многоугольника, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом (рис. 86). Такой перенос устанавливает соответствие между точками этих многоугольников. Все отрезки, соединяющие соответствующие точки данных плоских многоугольников, образуют многогранник.

Определение

Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

Многоугольники называются ***основаниями призмы***, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины оснований, — ***боковыми ребрами призмы***. Все грани призмы, которые не являются основаниями, называются ***боковыми гранями призмы***. Призма на рисунке 86 имеет основания $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, боковые грани $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_nB_nB_1A_1$ и боковые ребра A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n. Основаниями этой призмы являются плоские n-угольники, поэтому ее называют ***n-угольной призмой*** и обозначают $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$. Заметим, что в школьном курсе мы будем рассматривать только призмы, основаниями которых являются выпуклые многоугольники; такие призмы являются выпуклыми многогранниками.

Призма — от греческого «призма» — распиленная.

Рассмотрим некоторые свойства призмы.

Так как параллельный перенос является движением и переводит плоскость в параллельную плоскость (или в себя), то ***основания призмы параллельны и равны.***

Кроме того, из определения параллельного переноса следует, что ***боковые ребра призмы параллельны и равны***, а ***боковые грани призмы — параллелограммы***.

Изображение призмы строят по правилам параллельного проектирования. Построение обычно начинают с одного из оснований. Затем из вершин основания проводят параллельные и равные отрезки — боковые ребра призмы. Последовательно соединив концы боковых ребер, получают другое основание призмы. Невидимые ребра изображают штриховыми линиями.

Определение

Высотой призмы называется перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания.

Диагональю призмы называется отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани.

Определение

Прямой призмой называется призма, боковые ребра которой перпендикулярны плоскостям оснований.

Если призма не является прямой, то она называется ***наклонной призмой***.

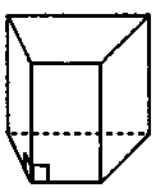
На рисунке 87, *а* изображена прямая четырехугольная призма, а на рисунке 87, *б* — наклонная треугольная призма.

Очевидно, что ***боковые ребра прямой призмы являются ее высотами***, а ***боковые грани прямой призмы — прямоугольники***.

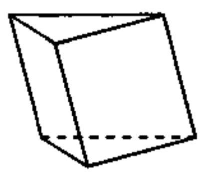
Определение

Правильной призмой называется прямая призма, основания которой — правильные многоугольники.

На рисунке 88 изображена правильная шестиугольная призма. Все боковые грани правильной призмы — равные прямоугольники.



а



б

Рис. 87. Прямая и наклонная призмы

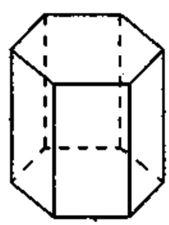


Рис. 88. Правильная призма

7.2. Боковая и полная поверхности призмы. Решение стереометрических задач на вычисление

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а ***площадью боковой поверхности*** — сумма площадей ее боковых граней.

Площадь полной поверхности обычно обозначается $S_{\text{полн}}$, а площадь боковой поверхности — $S_{\text{бок}}$. Очевидно, что ***для любой призмы*** $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$, ***где*** $S_{\text{осн}}$ ***— площадь основания призмы.***

Теорема (формула площади боковой поверхности прямой призмы)

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot H.$$

Доказательство

□ Боковые грани прямой призмы — прямоугольники, одна из сторон которых равна соответствующей стороне основания призмы, а соседняя сторона — высоте призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей этих прямоугольников. Таким образом, если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — стороны основания призмы, то $S_{\text{бок}} = a_1H + a_2H + \ldots + a_nH = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)H = P_{\text{осн}} \cdot H$.

Теорема доказана. ■

Формула площади боковой поверхности наклонной призмы будет доказана в § 10.

Задача

Диагональ правильной четырехугольной призмы равна d и образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

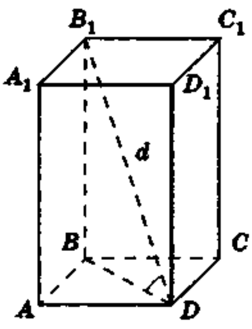


Рис. 89

Решение

1. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данная правильная четырехугольная призма, $B_1D = d$ — ее диагональ (рис. 89). Так как правильная призма является прямой, то $BB_1 \perp (ABC)$. Тогда отрезок BD — проекция диагонали B_1D на плоскость основания ABC. Значит, $\angle B_1DB$ — угол наклона диагонали призмы к плоскости основания; по условию задачи $\angle B_1DB = 60°$.

Найдем площадь боковой поверхности призмы.

2. $S_{бок} = P_{осн} \cdot H$, где $H = BB_1$ — боковое ребро призмы. Так как данная четырехугольная призма является правильной, то ее основание — квадрат $ABCD$; следовательно, $P_{осн} = 4AB$. Таким образом, $S_{бок} = 4AB \cdot BB_1$.

3. Из треугольника B_1DB ($\angle B = 90°$, $\angle D = 60°$, $B_1D = d$):

$$BB_1 = d\sin 60° = \frac{d\sqrt{3}}{2}, \quad BD = d\cos 60° = \frac{d}{2}.$$

4. Так как основание призмы — квадрат $ABCD$, то $AB = \frac{BD}{\sqrt{2}}$, $AB = \frac{d}{2\sqrt{2}}$.

5. $S_{бок} = 4 \cdot \frac{d}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{d\sqrt{3}}{2} = d^2\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{d^2\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\frac{d^2\sqrt{6}}{2}$.

Опишем на примере данной задачи общий подход к решению стереометрических задач на вычисление. Выделим четыре основных этапа решения.

1 этап. ***Построение рисунка и обоснование расстояний и углов из условия задачи.***

На этом этапе необходимо на основании условия задачи определить особенности взаимного расположения элементов рассматриваемой фигуры и отобразить их на рисунке, выбрав наиболее удачный способ расположения фигуры и ее элементов. В тексте решения необходимо установить соответствие между данными, приведенными в условии задачи, и элементами рисунка. При этом отдельно обосновываются:

- расстояния от точки до прямой и плоскости;
- расстояния между параллельными прямыми и плоскостями, расстояния и углы между скрещивающимися прямыми;
- углы между прямой и плоскостью, между скрещивающимися прямыми;
- двугранные углы, углы между плоскостями.

Так, в решении данной задачи (шаг 1) мы отдельно обосновали угол наклона диагонали к плоскости основания призмы.

2 этап. ***Выбор формулы и определение последовательности решения.***

На этом этапе необходимо выбрать формулу, по которой будет вычисляться искомая величина, и установить, какие вспомогательные величины и в каком порядке необходимо найти, чтобы применить выбранную формулу. Как правило, последовательность определения вспомогательных величин не является произвольной: решение задачи обычно начинают с рассмотрения тех плоских фигур, у которых по условию задачи известно больше элементов.

Например, в данной задаче (шаг 2), чтобы применить формулу $S_{бок} = P_{осн} \cdot H$, необходимо найти боковое ребро и сторону основания призмы.

3 этап. *Вычисление вспомогательных величин.*

В соответствии с намеченным планом решения необходимо найти вспомогательные величины, определенные на предыдущем этапе. Как правило, для этого нужно рассмотреть несколько плоских фигур. Так, в данной задаче (шаги 3, 4) мы нашли вспомогательные величины из прямоугольного треугольника B_1DB и квадрата $ABCD$.

Заметим, что в некоторых случаях плоские фигуры, элементы которых вычисляются, удобно изображать на отдельных (вынесенных) рисунках.

4 этап. *Получение результата.*

Найденные величины необходимо подставить в формулу, выбранную на втором этапе, и вычислить искомую величину (или упростить полученное буквенное выражение).

Заметим, что в окончательном ответе желательно избавиться от иррациональностей в знаменателях дробей (что и было сделано на пятом шаге решения данной задачи).

Ясно, что реализация отдельных шагов, предусмотренных планом, не отображается в записи решения: так, выбрать удачное расположение фигуры на рисунке можно мысленно или на черновике, а порядок нахождения вспомогательных величин определяют устно. Но все необходимые обоснования со ссылками на данные, приведенные в условии задачи, аксиомы, определения, теоремы и опорные факты необходимо записать.

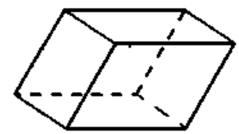
7.3. Параллелепипед. Куб

Частными случаями призм являются хорошо известные вам параллелепипед и куб. Поэтому если до сих пор они рассматривались только на основании наглядного представления, то теперь мы можем дать строгие определения этих фигур и исследовать их свойства.

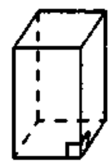
Определение

Параллелепипедом называется призма, основанием которой является параллелограмм.

На рисунке 90, *а* изображен ***наклонный параллелепипед***, а на рисунке 90, *б* — ***прямой параллелепипед*** (то есть прямая призма, основанием которой является параллелограмм). Две грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются ***противолежащими гранями***, а две грани с общими вершинами (а значит, и общим ребром) — ***соседними гранями***.



а



б

Рис. 90. Наклонный и прямой параллелепипеды

Обратим внимание на то, что ***все грани параллелепипеда — параллелограммы***, поэтому любую грань параллелепипеда можно считать его основанием (для произвольной призмы это не так).

Теорема (свойства параллелепипеда)

У параллелепипеда:

1) противолежащие грани параллельны и равны;

2) диагонали пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство

□ Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 91). Так как четырехугольники $ABCD$ и AA_1B_1B — параллелограммы, то $AD \parallel BC$, $AA_1 \parallel BB_1$, откуда, по признаку параллельности плоскостей, плоскости граней AA_1D_1D и BB_1C_1C параллельны. Кроме того, так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, то отрезки AB, A_1B_1, D_1C_1 и DC параллельны и равны, то есть существует параллельный перенос (на вектор $\overline{AB}$), который переводит грань AA_1D_1D в грань BB_1C_1C. Отсюда следует, что указанные грани равны. Параллельность и равенство двух других пар противолежащих граней доказывается аналогично.

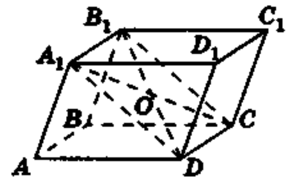


Рис. 91. К доказательству свойств параллелепипеда

Докажем теперь свойство диагоналей параллелепипеда. Для этого рассмотрим четырехугольник A_1B_1CD. Так как $A_1B_1 \parallel CD$ и $A_1B_1 = CD$ (объясните почему), то этот четырехугольник — параллелограмм. Отсюда следует, что его диагонали A_1C и B_1D, которые в то же время являются диагоналями данного параллелепипеда, точкой пересечения O делятся пополам. Аналогично, рассматривая четырехугольник AB_1C_1D, можно доказать, что его диагонали B_1D и AC_1 (которые также являются диагоналями данного параллелепипеда) делятся точкой пересечения пополам. Но точка O — середина B_1D, а значит, и середина AC_1. Таким образом, диагонали параллелепипеда A_1C, B_1D и AC_1 пересекаются в точке O и делятся ею пополам. И наконец, рассматривая четырехугольник A_1BCD_1, так же можно доказать, что диагональ BD_1 проходит через точку O и делится ею пополам. Теорема доказана. ■

Следствие

Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является центром его симметрии.

Рис. 92. Предметы, имеющие форму прямоугольных параллелепипедов

Определение

Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник.

Очевидно, что ***все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники***, а все его диагонали равны. Частным случаем прямоугольного параллелепипеда является правильная четырехугольная призма — прямоугольный параллелепипед с основанием-квадратом. Прямоугольные параллелепипеды — наиболее распространенный вид призм: предметы, имеющие форму прямоугольных параллелепипедов, окружают нас практически везде (рис. 92).

Длины трех попарно непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его ***измерениями*** и обычно обозначаются a, b и c. Докажем теорему, позволяющую вычислить длину диагонали прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям.

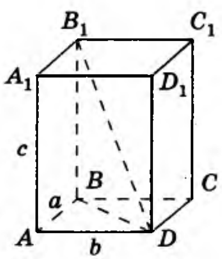


Рис. 93. К доказательству пространственной теоремы Пифагора

Теорема (о диагонали прямоугольного параллелепипеда)

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Доказательство

□ Пусть в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 93) $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Рассмотрим диагональ $B_1D = d$ данного параллелепипеда. Из треугольника B_1DB ($\angle B = 90°$)

по теореме Пифагора $B_1D^2 = BD^2 + B_1B^2$. Из треугольника ABD ($\angle A = 90°$) по теореме Пифагора $BD^2 = AB^2 + AD^2$. Значит, $B_1D^2 = AB^2 + AD^2 + B_1B^2$. Так как ребра AB, AD и B_1B не параллельны, то их длины являются измерениями данного параллелепипеда, то есть $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. ■

Заметим, что данная теорема представляет собой пространственный аналог теоремы Пифагора (для прямоугольного треугольника), поэтому ее иногда называют *пространственной теоремой Пифагора.*

Задача

Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 4 м^2, 8 м^2 и 32 м^2. Найдите диагональ параллелепипеда.

Решение

Пусть a, b и c — измерения данного параллелепипеда. Исходя из условия задачи имеем систему уравнений: $\begin{cases} ab = 4, \\ bc = 8, \\ ac = 32. \end{cases}$

Перемножив правые и левые части уравнений системы, получим $a^2b^2c^2 = 1024$, откуда $abc = 32$. Из этого равенства и уравнений системы находим $a = 4$, $b = 1$, $c = 8$. По теореме о диагонали прямоугольного параллелепипеда $d^2 = 4^2 + 1^2 + 8^2 = 81$, откуда $d = 9$ м.

Ответ: 9 м.

Определение

Кубом называется прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны.

На рисунке 94 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Из определения куба следует, что *все грани куба — равные квадраты.*

Связь между изученными видами призм иллюстрирует схема на с. 100.

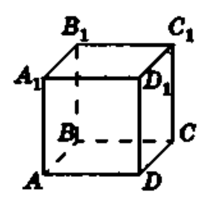
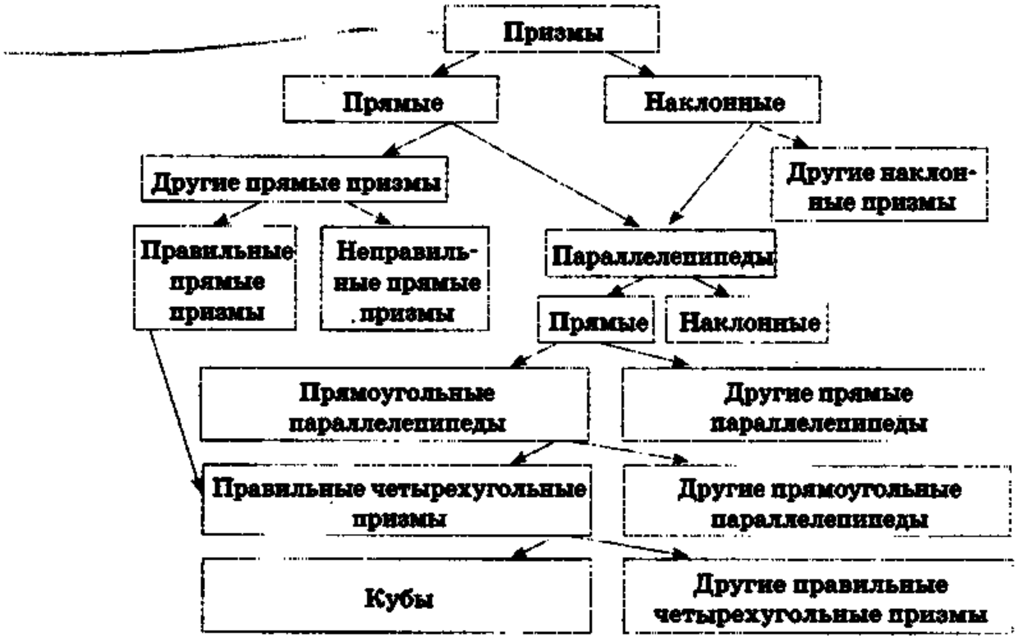


Рис. 94. Куб

7.4*. Правила определения понятий

Формулирование верных с точки зрения логики определений основных понятий всегда является одной из наиболее сложных проблем любой науки. Не является исключением и геометрия: оказывается, что такие общеизвестные и легкие для распознавания фигуры, как призма, пирамида и т. п., таят логические ловушки, в которые попадали даже известные ученые, пытаясь дать строгие определения этих фигур.



Особенно много логических ошибок связано с определением призмы. Например, в одном из учебников геометрии было приведено такое определение: «Призмой называется многогранник, две грани которого — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани — параллелограммы». Казалось бы, все верно — любая призма действительно удовлетворяет такому определению. Но посмотрим на рисунок 95: фигура, изображенная на нем, представляет собой объединение двух треугольных призм — прямой (она находится внизу) и наклонной, в основаниях которых лежат равные треугольники. Конечно же, такая фигура не является призмой, но она полностью удовлетворяет приведенному выше определению (убедитесь в этом самостоятельно).

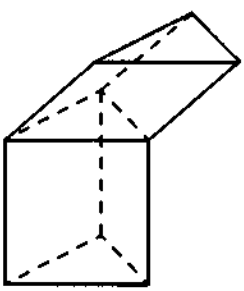


Рис. 95

В чем же кроется причина ошибки? В любом определении мы имеем дело с двумя понятиями — определяемым (в данном случае это понятие «призма») и тем, с помощью которого мы описываем определяемое понятие (в данном случае это понятие

«многогранник, две грани которого — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани — параллелограммы»). Одно из основных требований к логически верным определениям заключается в том, чтобы оба эти понятия были тождественными, то есть описывали одно и то же множество предметов. А в нашем случае множество многогранников, грани которых имеют описанные свойства, шире множества призм, то есть кроме собственно призм включает в себя и другие многогранники (в частности, фигуру на рис. 95).

Чтобы помочь вам избежать подобных ошибок, определим три основных правила формулирования определения понятий.

1) ***Определение должно быть соразмерным***, то есть множество предметов, которые представляют определяемое понятие, должно совпадать с множеством предметов, с помощью которых мы его описываем. Если этого правила не придерживаться, возникают типичные ошибки:

• слишком широкое определение (описание включает кроме предметов, являющихся представителями определяемого понятия, и другие предметы): например, определение «Лампа — это источник света» является неверным, так как кроме ламп существуют и другие источники света;

• слишком узкое определение (определяемое понятие в полной мере не соответствует приведенному описанию): например, определение «Дробь называется неправильной, если ее числитель больше знаменателя» не учитывает неправильную дробь, равную единице;

• определение в одном смысле широкое, а в другом — узкое: например, определение «Бочка — это емкость для хранения жидкостей», с одной стороны, широкое (емкостями для хранения жидкостей являются также ведра, бутылки и др.), а с другой — узкое (в бочке можно хранить не только жидкости).

2) ***Определение не должно содержать «логического круга»***, то есть определяемое понятие и понятие, с помощью которого его определяют, нельзя описывать друг через друга. Например, если мы определяем вращение как движение вокруг оси, то не можем определять ось как прямую, вокруг которой осуществляется вращение. «Логический круг» возникает и тогда, когда оба понятия в определении выражены практически одними и теми же словами. Например: «Фильтр — это прибор, с помощью которого осуществляется фильтрация» или «Гомотетией называется преобразование, которое переводит данную фигуру в гомотетичную» (такие логические ошибки называют тавтологиями).

3) ***Определение должно быть четким и понятным***, то есть оно не должно содержать не свойственных науке двузначностей, метафор, сравнений, как, например, «Повторение — мать учения», «Математика — царица наук» и т. д.

Придерживаясь этих правил, вы сможете четко выражать свои мысли и объяснять собеседнику, что именно вы имеете в виду,— а это умение является залогом успеха не только в геометрии, но и в любой области вашей будущей деятельности.

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

268° Сколько граней, вершин и ребер имеет n-угольная призма? Существует ли призма, у которой 50 боковых ребер; ровно 50 ребер? Сколько ребер имеет многоугольник, лежащий в основании призмы, у которой 100 граней?

269° Сравните:

а) боковые ребра прямой и наклонной призм, если высоты этих призм равны;

б) высоты прямой и наклонной призм, если боковые ребра этих призм равны.

270° Может ли боковая грань наклонной призмы быть прямоугольником? Приведите пример.

271° Всегда ли:

а) призма, основание которой — правильный многоугольник, является правильной;

б) правильная призма является прямой;

в) прямая призма является правильной?

272° Какую градусную меру имеет двугранный угол при боковом ребре:

а) правильной треугольной призмы;

б) правильной четырехугольной призмы?

273° Верно ли утверждение:

а) любой прямой параллелепипед является прямоугольным;

б) любой прямоугольный параллелепипед является прямым;

в) существует правильная четырехугольная призма, которая не является прямоугольным параллелепипедом;

г) существует прямоугольный параллелепипед, который не является правильной четырехугольной призмой?

274. Площади трех граней параллелепипеда равны 1 м^2, 2 м^2 и 3 м^2. Чему равна площадь полной поверхности параллелепипеда?

275. Всегда ли:

а) прямой параллелепипед, все ребра которого равны, является кубом;

б) прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны, является кубом?

МОДЕЛИРУЕМ

276*. Смоделируйте из проволоки каркасы двух треугольных призм с соответственно равными основаниями и равными высотами — прямую и наклонную. На какую призму ушло больше проволоки?

→ **277*.** Четыре грани параллелепипеда — прямоугольники. Будет ли данный параллелепипед прямоугольным? Ответ подтвердите с помощью модели.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

278*. Докажите, что если одно боковое ребро призмы перпендикулярно плоскости основания, то призма является прямой.

→ **279*.** Плоскости двух граней призмы перпендикулярны плоскости основания. Докажите, что если эти грани имеют общее ребро, то данная призма является прямой.

280. Боковое ребро наклонной призмы равно 12 см и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите высоту призмы.

281. Диагональ грани правильной треугольной призмы равна 5 см, а боковое ребро 3 см. Найдите площадь основания призмы.

→ **282.** В правильной четырехугольной призме диагональ равна 13 см, а площадь основания 72 см^2. Найдите высоту призмы.

283. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами a и $a\sqrt{3}$. Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы.

→ **284.** Все ребра правильной шестиугольной призмы равны 6 см. Найдите диагонали призмы.

285. По стороне основания a и боковому ребру b найдите площадь полной поверхности правильной n-угольной призмы, если:

а) $n=3$; б) $n=4$; в) $n=6$.

286. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 9 см и 12 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее наибольшая боковая грань — квадрат.

→ **287.** Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник с боковой стороной 5 см и основанием 8 см. Найдите площадь полной поверхности призмы, если диагональ грани, содержащей боковую сторону треугольника, наклонена к плоскости основания под углом 45°.

288. Высота правильной треугольной призмы равна 10 см, а площадь боковой поверхности — 240 см^2. Найдите площадь основания призмы.

→ **289.** Площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы равна 130 см^2, а площадь основания — 25 см^2. Найдите диагональ призмы.

290. Для хранения торфа выкапывают траншею, дно и наклонные стенки которой укрепляют досками (поперечное сечение траншеи изображено на рис. 96, линейные размеры даны в метрах). Найдите площадь укрепления траншеи длиной 10 м.

→ **291.** Потолок и боковые стенки гаража, длина которого равна 7 м, нужно обшить жестью (поперечное сечение гаража изображено на рис. 97, линейные размеры даны в метрах). Найдите площадь обшивки.

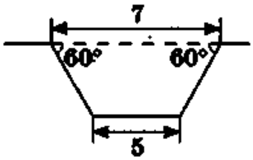


Рис. 96

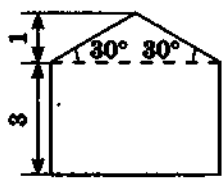


Рис. 97

292. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 4 см и 9 см, а угол между ними 30°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда, если его высота 10 см.

293. Все грани параллелепипеда — ромбы со стороной a и углом α. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

→ **294.** Площадь полной поверхности прямого параллелепипеда равна 224 см^2. Найдите высоту параллелепипеда, если его основание — ромб со стороной 8 см и высотой 4 см.

295. Найдите диагональ и площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны:

а) 1, 4 и 8; б) 2, 5 и 14; в) 2, 6 и 9.

296 (опорная). Докажите, что:

а) ***диагональ куба с ребром а равна*** $a\sqrt{3}$;

б) ***ребро куба с диагональю d равно*** $\frac{d}{\sqrt{3}}$.

297. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 9 см, а диагональ боковой грани — $\sqrt{65}$ см. Найдите сторону основания и высоту призмы.

298. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с плоскостями его боковых граней углы α и β. Найдите площадь основания параллелепипеда.

299. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 5, 12 и 13. Найдите угол наклона диагонали параллелепипеда к плоскости его наименьшей грани.

Уровень Б

300. Сколько диагоналей имеет n-угольная призма?

301. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC. Боковое ребро BB_1 образует с боковыми сторонами основания BA и BC равные углы. Докажите, что:

а) $BB_1 \perp AC$; б) AA_1C_1C — прямоугольник.

302. Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол 30°. Докажите, что боковое ребро призмы равно диагонали ее основания.

303. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник. Диагонали боковых граней призмы равны 8 см, 14 см и 16 см. Найдите высоту призмы.

304. Основание прямой призмы — ромб с диагоналями 10 см и 24 см. Найдите бо́льшую диагональ призмы, если ее меньшая диагональ наклонена к плоскости основания под углом 45°.

305. Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 7 см и 8 см и углом между ними 120°. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если площадь ее наибольшей боковой грани равна 65 см^2.

306. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с боковой стороной 13 см и радиусом вписанной окружности 6 см. Найдите площадь полной поверхности призмы, если диагональ наибольшей боковой грани наклонена к плоскости основания под углом 45°.

307. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 9 см, 10 см и 17 см. Найдите боковое ребро призмы, если площадь ее полной поверхности равна 360 см^2.

308. Основание наклонной призмы — квадрат со стороной 4 см. Две боковые грани призмы перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с ней углы $60°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна $2\sqrt{3}$ см.

→ **309.** Основанием наклонной призмы является равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 4 см. Боковое ребро, выходящее из вершины прямого угла основания, равно 5 см и образует с катетами треугольника углы $45°$. Найдите площадь полной поверхности призмы.

310. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 3 см и 5 см, а угол между ними $60°$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если его бо́льшая диагональ наклонена к плоскости основания под углом $45°$.

→ **311.** Стороны основания прямого параллелепипеда равны 5 см и 10 см, а одна из диагоналей основания — 13 см. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если его меньшая диагональ образует с боковым ребром угол $45°$.

312. Докажите, что сумма квадратов диагоналей любого параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.

→ **313.** Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с тремя его гранями, имеющими общую вершину, углы α, β и γ. Докажите, что $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$.

314. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если:

а) диагонали трех его граней равны 11 см, 19 см и 20 см;

б) периметры трех его граней равны 10 см, 18 см и 24 см;

в) площади трех его граней равны 12 см^2, 36 см^2 и 48 см^2.

→ **315.** Найдите расстояние от вершины куба с ребром a до его диагонали, не содержащей данную вершину.

316. Основание прямого параллелепипеда — ромб с большей диагональю d. Бо́льшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью его основания угол α, а диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

→ **317.** Площадь основания правильной четырехугольной призмы равна Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если угол между ее диагональю и боковым ребром равен α.

Уровень B

318. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 см и боковым ребром 15 см. Найдите кратчайшее расстояние по поверхности призмы от середины ребра BC до середины ребра A_1D_1.

319. Основанием прямого параллелепипеда является ромб с острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда равна l и образует с боковой гранью угол β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

320. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с двумя его ребрами, выходящими из одной вершины, углы 45° и 60°. Найдите угол между данной диагональю и третьим ребром, выходящим из этой же вершины.

→ **321.** Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна S. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь основания призмы.

322. Все ребра наклонного параллелепипеда равны a. Основанием параллелепипеда является квадрат, а одна из вершин верхнего основания равноудалена от всех вершин нижнего основания. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

→ **323.** Основанием наклонного параллелепипеда является квадрат со стороной 6 см. Одна из вершин верхнего основания параллелепипеда равноудалена от всех сторон нижнего основания. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда, если его высота равна 4 см.

Повторение перед изучением § 8

Теоретический материал

- правильные многоугольники (9 класс)
- теорема о трех перпендикулярах (10 класс)
- перпендикулярность плоскостей (10 класс)

Задачи

324. Точка M не лежит в плоскости ромба $ABCD$. Докажите, что если $MA = MC$ и $MB = MD$, то плоскости MAC и MBD перпендикулярны.

325. Точка P не лежит в плоскости равностороннего треугольника ABC и равноудалена от его вершин. Докажите, что точка P равноудалена от сторон треугольника ABC.

§ 8. ПИРАМИДА

8.1. Пирамида и ее элементы

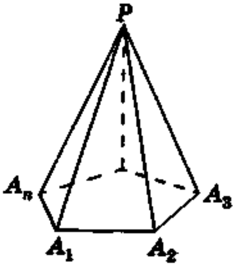


Рис. 98. Пирамида

Рассмотрим изображенный на рисунке 98 многоугольник $A_1A_2...A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Отрезки, соединяющие точку P с точками плоского многоугольника $A_1A_2...A_n$, образуют многогранник, который называется пирамидой.

Определение

Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (***основания пирамиды***), точки, не лежащей в плоскости основания (***вершины пирамиды***), и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания.

Пирамида — греческое слово. По одной версии, происходит от египетского «пер о» — большой дом (так египтяне называли усыпальницы фараонов), по другой — от греческого «пор» — огонь (пирамиды традиционно связывали со стихией огня).

На рисунке 98 изображена пирамида с вершиной P, основание которой — плоский n-угольник $A_1A_2...A_n$. Такую пирамиду называют ***n-угольной пирамидой*** и обозначают $PA_1A_2...A_n$.

Отрезки PA_1, PA_2, ..., PA_n, соединяющие вершину пирамиды с вершинами ее основания, называют ***боковыми ребрами пирамиды***, а треугольники PA_1A_2, PA_2A_3, ..., PA_nA_1, вершинами которых является вершина пирамиды и две соседние вершины основания, — ***боковыми гранями пирамиды***. Углы A_1PA_2, A_2PA_3, ..., A_nPA_1 называют ***плоскими углами при вершине пирамиды***. Двугранный угол, образованный полуплоскостями, одна из которых содержит боковую грань пирамиды, а другая — основание пирамиды, называют ***двугранным углом при основании пирамиды***. Например, на рисунке 98 двугранный угол при ребре A_2A_3 основания пирамиды определяется так: за ребро двугранного угла принимается прямая A_2A_3, а за грани — полуплоскости, содержащие грани PA_2A_3 и $A_1A_2...A_n$.

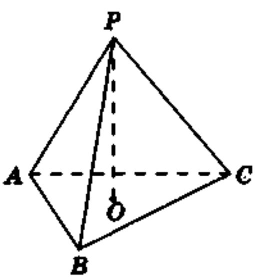


Рис. 99. Тетраэдр

Треугольную пирамиду иначе называют ***тетраэдром*** (рис. 99). Так как все грани тетраэдра — треугольники, любую его грань можно считать основанием (для произвольной пирамиды это не так).

В школьном курсе мы будем рассматривать только те пирамиды, основания которых — выпуклые многоугольники. Такие пирамиды являются выпуклыми многогранниками.

Тетраэдр — от греческого «тетраэдр» — четырехгранник.

Определение

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости ее основания.

На рисунке 99 отрезок PO — высота треугольной пирамиды $PABC$.

Изображение пирамиды строят по правилам параллельного проектирования. Построение обычно начинают с основания. Затем обозначают вершину пирамиды и соединяют ее с вершинами основания. Для некоторых видов пирамид, которые будут рассматриваться дальше, целесообразно после построения основания пирамиды сразу же построить ее высоту.

Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней, а ***площадью полной поверхности*** — сумма площадей основания и боковой поверхности:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}.$$

8.2. Правильная пирамида

Определение

Правильной пирамидой называется пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а основание высоты пирамиды совпадает с центром этого многоугольника.

На рисунке 100 изображена правильная четырехугольная пирамида $PABCD$. Ее основанием служит квадрат $ABCD$, а основание высоты PO — точка O — является точкой пересечения диагоналей (центром) этого квадрата. Обоснуем на примере данной пирамиды некоторые свойства правильных пирамид (для произвольной пирамиды доказательство аналогично). Сначала докажем, что прямоугольные треугольники PAO, PBO, PCO и PDO равны. Действительно, так как точка O — центр окружности, описанной около основания пирамиды, то

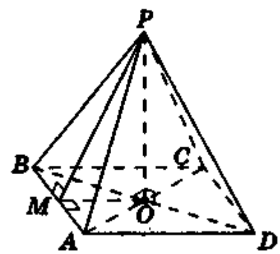


Рис. 100. Правильная четырехугольная пирамида

$OA=OB=OC=OD$. Тогда $\triangle PAO=\triangle PBO=\triangle PCO=\triangle PDO$ как прямоугольные по двум катетам. Из равенства рассматриваемых треугольников следует, что *все боковые ребра правильной пирамиды равны, равнонаклонены к плоскости основания и образуют равные углы с высотой пирамиды, а все боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.*

Определение

Апофемой называется высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины.

На рисунке 100 отрезок PM — апофема правильной пирамиды $PABCD$. Так как все боковые грани правильной пирамиды равны, то и *все апофемы правильной пирамиды равны*. А из этого, в частности, следует, что *все двугранные углы при основании правильной пирамиды равны* (обоснуйте это самостоятельно).

Теорема (формула площади боковой поверхности правильной пирамиды)

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра ее основания на апофему:

$$S_{бок}=\frac{1}{2}P_{осн}\cdot l.$$

Доказательство

□ Пусть сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a, а апофема — l. Тогда площадь одной боковой грани пирамиды равна $\frac{1}{2}al$. Боковая поверхность пирамиды состоит из n таких граней. Следовательно, $S_{бок}=n\cdot\frac{1}{2}al=\frac{1}{2}(na)l=\frac{1}{2}P_{осн}\cdot l$.

Теорема доказана. ■

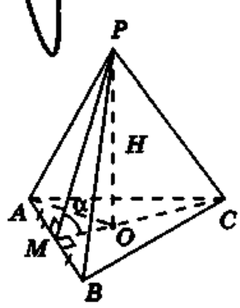


Рис. 101

Задача

В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее высота равна H.

Решение

1. Пусть дана правильная треугольная пирамида $PABC$ (рис. 101), $PO\perp(ABC)$, PO — высота пирамиды; по условию задачи $PO=H$. Проведем $PM\perp AB$, PM — апофема правильной пирамиды $PABC$. Отрезок OM — проекция наклонной PM на пло-

скость ABC. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AB$. Значит, $\angle PMO$ — линейный угол двугранного угла при ребре основания AB; по условию задачи $\angle PMO = \alpha$. Так как треугольник ABC равносторонний, точка O — центр треугольника, принадлежащий медиане, биссектрисе и высоте CM.

Найдем площадь боковой поверхности пирамиды.

2. $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot PM = \frac{3}{2} AB \cdot PM$.

3. Из треугольника PMO ($\angle O = 90°$, $\angle M = \alpha$, $PO = H$):

$$PM = \frac{H}{\sin\alpha},\ OM = H \operatorname{ctg}\alpha.$$

4. Отрезок OM — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда $OM = \frac{AB}{2\sqrt{3}}$, откуда $AB = 2\sqrt{3}\,OM$, $AB = 2\sqrt{3} H \operatorname{ctg}\alpha$.

5. $S_{бок} = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{3} H \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{3} H^2 \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3} H^2 \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Заметим, что при решении многих задач, связанных с правильными пирамидами, отдельно рассматривают прямоугольные треугольники PAO и PMO (рис. 101) В частности, в треугольнике PAO PO — высота пирамиды, PA — боковое ребро, AO — радиус окружности, описанной около основания пирамиды; в треугольнике PMO PO — высота пирамиды, PM — апофема, MO — радиус окружности, вписанной в основание пирамиды.

8.3*. Нахождение расстояния от точки до плоскости боковой грани пирамиды

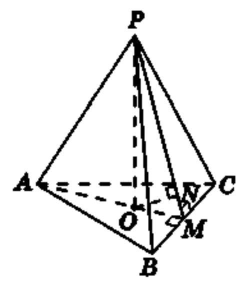


Рис. 102

В некоторых задачах, связанных с пирамидами, необходимо найти расстояние от данной точки пирамиды до боковой грани, не содержащей данную точку. Пусть, например, в правильной треугольной пирамиде $PABC$ (рис. 102) нужно построить расстояние от основания высоты PO — точки O — до боковой грани PBC. Ясно, что можно было бы опустить из точки O перпендикуляр ON к плоскости PBC. Но такое построение не позволяет сразу определить особенности расположения точки N в треугольнике PBC, которые могут быть использованы в процессе дальнейшего решения задачи. Между тем, оказывается, что точка N принадлежит апофеме PM данной пирамиды.

Для того чтобы получить этот факт в процессе нахождения расстояния от точки O до плоскости PBC, можно рассуждать следующим образом.

1. Пусть $PM \perp BC$, PM — апофема данной правильной пирамиды. Так как $PO \perp (ABC)$, а отрезок OM — проекция наклонной PM на плоскость ABC, то по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp BC$.

2. Так как прямая BC перпендикулярна двум прямым плоскости POM ($BC \perp PM$, $BC \perp OM$), то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $BC \perp (POM)$.

3. Так как плоскость PBC содержит прямую BC, перпендикулярную плоскости POM, то по признаку перпендикулярности плоскостей $(PBC) \perp (POM)$.

4. Проведем в плоскости POM перпендикуляр ON к прямой PM. Тогда $ON \perp (PBC)$ по свойству двух перпендикулярных плоскостей. Значит, отрезок ON — расстояние от точки O до плоскости PBC.

Таким образом, мы построили отрезок ON не как перпендикуляр к плоскости боковой грани пирамиды, а как перпендикуляр к апофеме, и доказали, что он в то же время является перпендикуляром к плоскости PBC.

Задача

Высота правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью боковой грани угол β. Расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно m. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

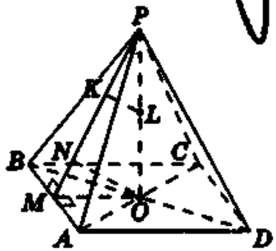
Решение

1. Пусть дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ (рис. 103, *а*), $PO \perp (ABC)$, PO — высота пирамиды. Проведем $PM \perp AB$, PM — апофема правильной пирамиды $PABCD$. Отрезок OM — проекция наклонной PM на плоскость ABC. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AB$.

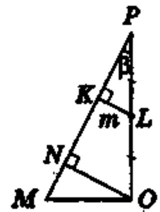
2. Так как $AB \perp PM$, $AB \perp OM$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AB \perp (POM)$.

3. Так как плоскость PAB содержит прямую AB, перпендикулярную плоскости POM, то по признаку перпендикулярности плоскостей $(PAB) \perp (POM)$.

4. Проведем в плоскости POM из точки O и из точки L — середины высоты PO — перпендикуляры: $ON \perp PM$ и $LK \perp PM$. Тогда $ON \perp (PAB)$, $LK \perp (PAB)$ по свойству перпендикулярных плоскостей. Следовательно, отрезок LK — расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани; по условию задачи $LK = m$. Кроме того, отрезок PN — проекция наклонной OP на плоскость PAB, то есть $\angle OPN$ — угол между высотой пирамиды и плоскостью боковой грани; по условию задачи $\angle OPN = \beta$.



а



б

Рис. 103

Найдем площадь полной поверхности пирамиды.

5. $S_{\text{полн}} = a^2 + \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot PM = a^2 + 2a \cdot PM$, где a — сторона основания пирамиды.

6. Из треугольника PKL ($\angle K = 90°$, $\angle P = \beta$, $KL = m$) $PL = \frac{m}{\sin\beta}$ (рис. 103, *б*). Так как точка L — середина высоты PO, то $PO = \frac{2m}{\sin\beta}$.

7. Из треугольника POM ($\angle O = 90°$, $\angle P = \beta$, $PO = \frac{2m}{\sin\beta}$):

$PM = \frac{PO}{\cos\beta}$, $PM = \frac{2m}{\sin\beta\cos\beta}$; $OM = PO\,\mathrm{tg}\,\beta$, $OM = \frac{2m\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\beta} = \frac{2m}{\cos\beta}$.

8. Так как точка O — центр квадрата $ABCD$, $OM \perp AB$, то OM — радиус окружности, вписанной в квадрат. Тогда $OM = \frac{a}{2}$, откуда $a = 2OM$, $a = \frac{4m}{\cos\beta}$.

9. $S_{\text{полн}} = \left(\frac{4m}{\cos\beta}\right)^2 + 2 \cdot \frac{4m}{\cos\beta} \cdot \frac{2m}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{16m^2}{\cos^2\beta} + \frac{16m^2}{\cos^2\beta\sin\beta} =$

$= \frac{16m^2}{\cos^2\beta}\left(1 + \frac{1}{\sin\beta}\right)$.

Ответ: $\frac{16m^2}{\cos^2\beta}\left(1 + \frac{1}{\sin\beta}\right)$.

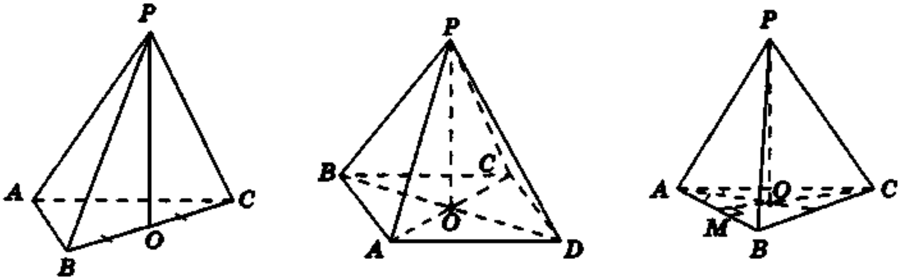
Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

326°. Сколько граней, вершин и ребер имеет n-угольная пирамида? Существует ли пирамида, у которой 19 боковых ребер; ровно 19 ребер?

327°. Обязательно ли точки высоты пирамиды являются точками пирамиды? Приведите примеры.

328. По данным рисунка 104, *а—в* определите, является ли изображенная пирамида правильной (PO — высота пирамиды).



$ABCD$ — квадрат

$\triangle ABC$ правильный

а б в

Рис. 104

329. Все боковые грани пирамиды — равные равнобедренные треугольники. Обязательно ли такая пирамида является правильной? Приведите контрпример.

330. Могут ли все плоские углы при вершине правильной пирамиды быть тупыми; прямыми? В каких пределах может изменяться величина плоского угла при вершине правильной пирамиды:

а) треугольной;

б) четырехугольной

в) шестиугольной?

331. Могут ли быть равными все ребра правильной шестиугольной пирамиды? Ответ обоснуйте.

332. Боковое ребро правильной пирамиды равно b, высота — h, а апофема — l. Сравните числа b, h и l.

333. Может ли площадь боковой поверхности правильной пирамиды быть равна площади ее основания? Ответ обоснуйте.

МОДЕЛИРУЕМ

334. Нарисуйте пирамиду, все грани которой — прямоугольные треугольники. Изготовьте ее модель из проволоки. Имеет ли такая пирамида вершину, все плоские углы при которой прямые? Могут ли все грани пирамиды быть равнобедренными прямоугольными треугольниками?

→ **335.** Нарисуйте на плотной бумаге развертку правильной четырехугольной пирамиды. Может ли апофема такой пирамиды быть вдвое меньше ребра основания? Почему? Вырежьте полученную развертку и склейте из нее модель пирамиды.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

336. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и равны. Докажите, что основанием пирамиды является равносторонний треугольник. Найдите площадь этого треугольника, если каждое боковое ребро пирамиды равно $3\sqrt{2}$ см.

337. Основанием пирамиды является ромб с диагоналями 10 см и 18 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна 12 см. Найдите боковые ребра пирамиды.

→ **338.** Основанием пирамиды $PABC$ является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Боковое ребро PB является высотой пирамиды. Найдите площадь основания пирамиды, если $PA=17$ см, $PB=8$ см, $PC=10$ см.

339. Изобразите правильную треугольную пирамиду. По рисунку обоснуйте:

а) угол наклона бокового ребра к плоскости основания;

б) двугранный угол при основании пирамиды.

340. Найдите:

а) сторону основания правильной пирамиды с боковым ребром 13 см и апофемой 12 см;

б) апофему правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 18 см и высотой 12 см;

в) высоту правильной треугольной пирамиды со стороной основания $4\sqrt{3}$ см и боковым ребром 5 см.

341. Найдите:

а) апофему правильной пирамиды со стороной основания 12 см и площадью боковой грани 24 см^2;

б) площадь основания правильной четырехугольной пирамиды с апофемой 5 см и высотой 4 см.

342. В правильной четырехугольной пирамиде найдите:

а) высоту, если апофема равна 5 см, а боковое ребро $\sqrt{34}$ см;

б) боковое ребро, если высота равна $\sqrt{3}$ см, а двугранный угол при основании 60°;

в) площадь основания, если боковое ребро равно $4\sqrt{2}$ см и наклонено к плоскости основания под углом 45°.

343. В правильной треугольной пирамиде найдите:

а) высоту, если площадь основания равна $9\sqrt{3}$ см^2, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°;

б) боковое ребро, если сторона основания равна $2\sqrt{3}$ см, а двугранный угол при основании 45°.

344. Знаменитая пирамида Хеопса в Египте изначально имела форму правильной четырехугольной пирамиды с ребром основания 230 м и боковым ребром 218 м (рис. 105). Найдите высоту пирамиды Хеопса (ответ округлите до метров).

Рис. 105. Пирамида Хеопса

345. Найдите площадь боковой поверхности:

а) правильной треугольной пирамиды со стороной основания 6 см и апофемой 4 см;

б) правильной четырехугольной пирамиды с диагональю основания 8 см и апофемой $5\sqrt{2}$ см;

в) правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания 10 см и боковым ребром 13 см.

346. В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 8 см, а плоский угол при вершине 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

347. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, апофема которой равна 4 см, а плоские углы при вершине прямые.

348. Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна 36 см^2, а площадь ее полной поверхности 96 см^2. Найдите высоту пирамиды.

349. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если отрезок, соединяющий середину апофемы с серединой высоты, равен m.

→ 350. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро образует со стороной основания угол β, а апофема равна l.

Уровень Б

351. Основанием пирамиды $PABCD$ является параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Известно, что $PA=PC$, $PB=PD$, $AB=7$ м, $AD=9$ м, $AC=8$ м. Найдите боковые ребра пирамиды, если ее высота равна 3 м.

→ 352. Основание пирамиды — параллелограмм со сторонами 6 см и 16 см и углом 60°. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите ее длину, если боковое ребро, выходящее из вершины тупого угла параллелограмма, равно 25 см.

353 (задача И. Ф. Шарыгина*). Докажите, что все грани треугольной пирамиды $PABC$ — равные треугольники, если:

а) $AB=PC$, $AC=PB$, $BC=PA$;

б) $AB=PC$, $AC=PB$, $\angle ABP=\angle BPC$;

в) $AB=PC$, $\angle ABP=\angle BAC$, $\angle PAB=\angle ABC$;

г) $\angle ABP=\angle BPC$, $\angle APB=\angle CBP$, $\angle APC=\angle BAP$.

354. Докажите, что скрещивающиеся ребра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

→ 355. Все ребра четырехугольной пирамиды равны. Докажите, что данная пирамида является правильной.

356. В правильной треугольной пирамиде найдите:

а) высоту, если сторона основания равна 6 см, а плоский угол при вершине равен 90°;

б) боковое ребро, если площадь основания пирамиды равна $3\sqrt{3}$ см², а двугранный угол при основании равен 45°;

в) апофему, если радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R, а угол между боковым ребром и ребром основания равен α.

---

* И. Ф. Шарыгин (1937–2004) — известный российский математик, педагог и ученый, популяризатор геометрии.

357. В правильной четырехугольной пирамиде найдите:

а) высоту, если площадь основания равна 8 см^2, а угол между апофемами двух смежных боковых граней равен 60°;

б) сторону основания, если все ребра пирамиды равны, а ее высота равна $5\sqrt{2}$ см.

358. В правильной треугольной пирамиде сторона основания вдвое больше апофемы. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее высота равна $\sqrt{6}$ см.

→ **359.** Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если площадь ее основания равна $6\sqrt{3}$ см^2, а боковое ребро — $\sqrt{13}$ см.

360. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, у которой угол между высотой и апофемой равен β, а основание высоты пирамиды удалено от апофемы на расстояние m.

→ **361.** Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом α. Отрезок, соединяющий основание высоты пирамиды с серединой апофемы, равен d. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

362. Площадь основания правильной пирамиды составляет половину площади ее боковой поверхности. Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

→ **363.** Основание правильной пирамиды — треугольник со стороной 4 см. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Уровень В

364. Все ребра n-угольной пирамиды равны. Каким может быть значение n? Проведите исследование.

365. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 1, а плоский угол при вершине равен γ. Найдите:

а) ребро основания;
б) апофему пирамиды;
в) боковое ребро пирамиды.

366. Основание высоты правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ удалено от плоскости боковой грани на 6 см. Найдите расстояние от вершины D до плоскости PAB.

→ **367.** Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α. Точка высоты пирамиды, лежащая на расстоянии a от ее вершины, равноудалена от плоскости основания и боковой грани. Найдите:

а) высоту пирамиды;
б) сторону основания.

368. Докажите, что если скрещивающиеся ребра треугольной пирамиды попарно равны, то сумма плоских углов при каждой ее вершине равна 180°.

→ **369.** В треугольной пирамиде сумма плоских углов при каждой вершине основания равна 180°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь ее основания равна S.

370. В правильной треугольной пирамиде высота образует с боковой гранью угол β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если расстояние от вершины ее основания до противолежащей боковой грани равно l.

→ **371.** В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если расстояние от середины ее высоты до боковой грани равно m.

372. В правильной треугольной пирамиде отрезок, соединяющий основание высоты с серединой бокового ребра, наклонен к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее апофема равна l.

→ **373.** Высота правильной четырехугольной пирамиды равна H и образует с плоскостью боковой грани угол β. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Повторение перед изучением § 9

Теоретический материал

- вписанные и описанные четырехугольники (8 класс)
- решение треугольников (9 класс)
- свойства точек, равноудаленных от вершин и сторон многоугольника (10 класс)
- перпендикулярность плоскостей (10 класс)
- площадь ортогональной проекции многоугольника (10 класс)

Задачи

374. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен стороне треугольника. Найдите угол, противолежащий данной стороне, если она является наибольшей стороной данного треугольника.

375. Площадь ортогональной проекции равнобедренного треугольника равна 6 см^2. Найдите стороны треугольника, если его высота, проведенная к основанию, равна 3 см, а угол между плоскостью треугольника и плоскостью проекции равен 60°.

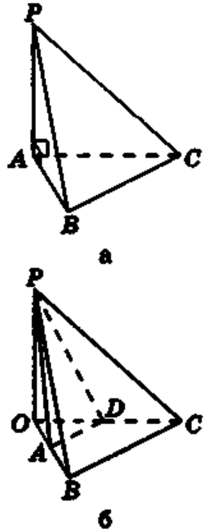


Рис. 106. Пирамиды, в которых две боковые грани перпендикулярны плоскости основания

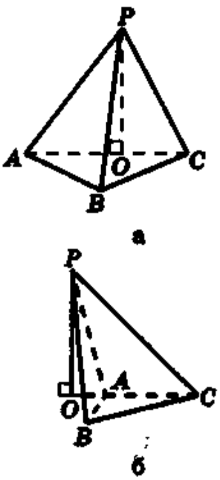


Рис. 107. Пирамиды, в которых одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания

§ 9. НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ПИРАМИД

9.1. Пирамиды, в которых высота принадлежит плоскостям одной или двух боковых граней

Решение стереометрических задач, связанных с пирамидами, обычно начинается с построения рисунка. Но во многих случаях для правильного отображения на рисунке взаимного расположения элементов пирамиды (в частности, положения ее высоты) необходимо провести предварительный анализ условия задачи и на основании существующих данных определить свойства пирамиды. Попробуем установить такие свойства для отдельных видов пирамид.

Рассмотрим сначала пирамиду, в которой две боковые грани перпендикулярны плоскости основания. По теореме о двух плоскостях, перпендикулярных третьей, прямая пересечения плоскостей, содержащих данные боковые грани, перпендикулярна плоскости основания. Следовательно, ***если две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, то прямая их пересечения содержит высоту пирамиды.*** Например, на рисунке 106, *а* соседние грани PAB и PAC пирамиды $PABC$ перпендикулярны плоскости основания ABC, а высотой пирамиды является их общее ребро PA. На рисунке 106, *б* изображен более сложный случай: грани PAB и PCD, которые не являются соседними, перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а высота пирамиды PO лежит на прямой пересечения плоскостей PAB и PCD вне данной пирамиды (объясните, почему эти плоскости пересекаются).

Рассмотрим теперь пирамиду $PABC$, в которой одна боковая грань PAC перпендикулярна плоскости основания ABC (рис. 107). Нетрудно догадаться, что высота данной пирамиды PO будет принадлежать плоскости грани PAC. Но если провести из вершины пирамиды перпендикуляр PO к плоскости ABC, то обоснование принадлежности точки O

прямой AC будет достаточно громоздким. В этом случае стоит прибегнуть к «хитрости» — воспользоваться тем, что перпендикуляр, проведенный в одной из двух перпендикулярных плоскостей к прямой пересечения этих плоскостей, является перпендикуляром к другой плоскости. Итак, проведем в плоскости PAC перпендикуляр PO к прямой AC; тогда по упомянутому свойству перпендикулярных плоскостей $PO \perp (ABC)$, PO — высота пирамиды.

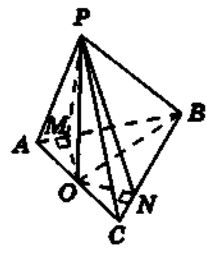
Таким образом, ***если в пирамиде одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, то высота пирамиды принадлежит плоскости этой грани и является перпендикуляром, проведенным из вершины пирамиды к прямой пересечения плоскости данной грани с плоскостью основания.*** Заметим, что основание высоты PO может лежать как на отрезке AC (рис. 107, *а*), так и вне его (рис. 107, *б*).

Задача

Основанием пирамиды является правильный треугольник. Одна боковая грань пирамиды перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее высота равна H.

Решение

1. Пусть дана треугольная пирамида $PABC$, в основании которой лежит правильный треугольник ABC, $(PAC) \perp (ABC)$ (рис. 108, *а*). Проведем в плоскости PAC $PO \perp AC$. Тогда по свойству перпендикулярных плоскостей $PO \perp (ABC)$, PO — высота пирамиды; по условию задачи $PO = H$.



а

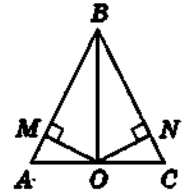
Рис. 108. См. также с. 122

2. Проведем из точки O перпендикуляры к сторонам основания: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$. Отрезки OM и ON — проекции наклонных PM и PN на плоскость ABC. По теореме о трех перпендикулярах $PM \perp AB$, $PN \perp BC$. Значит, углы PMO и PNO — линейные углы двугранных углов при ребрах основания AB и BC; по условию задачи $\angle PMO = \angle PNO = \beta$.

Найдем площадь боковой поверхности пирамиды.

3. $S_{бок} = S_{PAC} + S_{PAB} + S_{PBC}$.

4. Прямоугольные треугольники PMO и PNO равны по общему катету PO и противолежащему углу ($\angle PMO = \angle PNO = \beta$ по условию). Отсюда $OM = ON$. Тогда $\triangle AOM = \triangle CON$ (рис. 108, *б*) как прямоугольные по катету ($OM = ON$) и противолежащему углу ($\angle MAO = \angle NCO = 60°$, так как треугольник ABC равносторонний). Значит, $AO = CO$. Тогда $PA = PC$ как наклонные с равными проекциями, проведенные из точки P к плоскости ABC. Таким образом, $\triangle PAB = \triangle PCB$ по трем сторонам (PB — общая, $PA = PC$ по доказанному, $AB = CB$ как стороны равностороннего треугольника ABC). Следовательно,



б

Рис. 108.Окончание

$$S_{бок} = S_{PAC} + 2S_{PBC} = \frac{1}{2} PO \cdot AC + PN \cdot BC.$$

5. Из треугольника PON ($\angle O = 90°$, $\angle N = \beta$, $PO = H$):

$$PN = \frac{H}{\sin\beta}, \quad ON = H \operatorname{ctg}\beta.$$

6. Из треугольника ONC ($\angle N = 90°$, $\angle C = 60°$, $ON = H\operatorname{ctg}\beta$):

$$OC = \frac{ON}{\sin 60°}, \quad OC = \frac{2H\operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{3}}.$$

Так как O — середина AC, то $AC = 2OC = \dfrac{4H\operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{3}}$.

7. $$S_{бок} = \frac{1}{2} H \cdot \frac{4H\operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{3}} + \frac{H}{\sin\beta} \cdot \frac{4H\operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}H^2\operatorname{ctg}\beta}{3}\left(1 + \frac{2}{\sin\beta}\right).$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}H^2\operatorname{ctg}\beta}{3}\left(1 + \dfrac{2}{\sin\beta}\right)$.

Заметим, что геометрическая конфигурация данной задачи позволяет получить еще один полезный факт: ***если две соседние боковые грани пирамиды наклонены к ее основанию под равными углами, то основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе угла между ребрами основания, принадлежащими данным боковым граням***. Обоснуйте этот факт самостоятельно.

Другой способ вычислений, который можно использовать для решения этой задачи, будет описан в п. 9.3.

9.2. Пирамиды, в которых основанием высоты является центр окружности, описанной около основания пирамиды

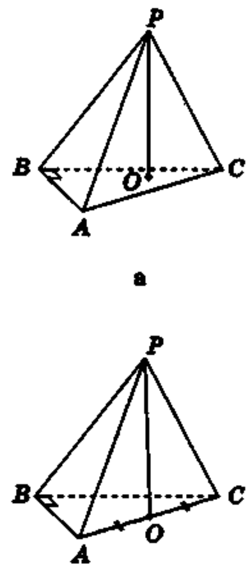
В пункте 9.1 мы рассмотрели случаи, когда предварительный анализ условия задачи существенно влияет на построение рисунка и ход решения. Рассмотрим еще один подобный пример.

Задача

Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Все боковые ребра пирамиды равны 13 см. Найдите высоту пирамиды.

Решение

Решение этой задачи можно начать с построения изображения данной пирамиды $PABC$ с основанием ABC ($\angle B = 90°$, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см), боковыми ребрами $PA = PB = PC = 13$ см и высотой $PO \perp (ABC)$. Такое изображение представлено на рисунке 109, *а*. Но соответствует ли оно условию задачи?



а

б

Рис. 109

Так как точка P равноудалена от вершин треугольника ABC, то основание перпендикуляра, проведенного из данной точки к плоскости ABC, является центром окружности, описанной около основания пирамиды. Значит, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Так как в прямоугольном треугольнике центр описанной окружности является серединой гипотенузы, то точка O — середина отрезка AC. Таким образом, условию данной задачи соответствует рисунок 109, *б*. Завершим теперь решение задачи.

Из треугольника ABC по теореме Пифагора $AC = 10$ см, значит, $AO = OC = 5$ см.

Из треугольника POA ($\angle O = 90°$, $PA = 13$ см, $AO = 5$ см) по теореме Пифагора $PO = 12$ см.

Ответ: 12 см.

Только что приведенные рассуждения можно обобщить для произвольной пирамиды.

Опорная задача

(о пирамиде с равными боковыми ребрами)

Если все боковые ребра пирамиды равны, то основанием ее высоты является центр окружности, описанной около основания пирамиды. Докажите.

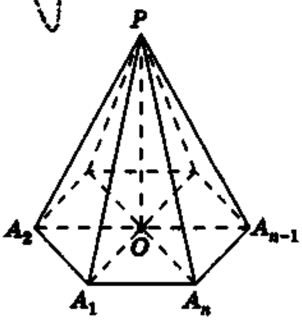


Рис. 110

Решение

Для данной пирамиды $PA_1A_2...A_n$ с высотой PO (рис. 110) прямоугольные треугольники POA_1, POA_2, ..., POA_n равны по гипотенузе и катету. Отсюда $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$, то есть точка O является центром окружности, описанной около многоугольника $A_1A_2...A_n$.

Опираясь на другие признаки равенства прямоугольных треугольников, нетрудно получить еще одно полезное обобщение.

Если в пирамиде выполняется хотя бы одно из условий:

1) все боковые ребра равны;

2) все боковые ребра образуют равные углы с плоскостью основания пирамиды;

3) все боковые ребра образуют равные углы с высотой пирамиды,

то основанием высоты пирамиды является центр окружности, описанной около основания пирамиды.

Наличие хотя бы одного из этих условий указывает на то, что около основания данной пирамиды можно описать окружность, центр которой является основанием ее высоты. Более того, имеет место обратное утверждение. Сформулируйте и докажите его самостоятельно.

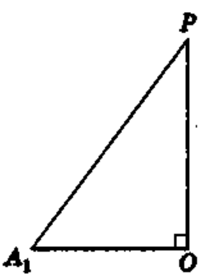


Рис. 111

Заметим также, что при решении многих задач, связанных с пирамидами, имеющими описанные выше свойства, отдельно рассматривают прямоугольный треугольник PA_1O (рис. 111). В нем PO — высота пирамиды, PA_1 — боковое ребро, A_1O — радиус окружности, описанной около основания пирамиды.

9.3. Пирамиды, в которых основанием высоты является центр окружности, вписанной в основание пирамиды

Рассмотрим еще одну задачу, важным этапом решения которой является определение положения основания высоты пирамиды.

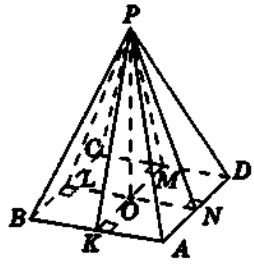
Задача

Основанием пирамиды является ромб с диагоналями 10 см и 24 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

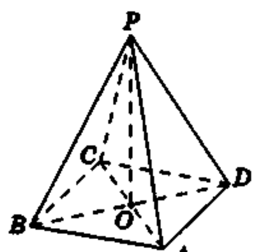
Решение

Пусть дана пирамида $PABCD$, основание которой — ромб $ABCD$ ($BD=24$ см, $AC=10$ см), $PO\perp(ABC)$, PO — высота пирамиды (рис. 112, *а*). Определим положение точки O в ромбе $ABCD$.

Проведем из точки P перпендикуляры: $PK\perp AB$, $PL\perp BC$, $PM\perp CD$, $PN\perp AD$. Отрезки OK, OL, OM и ON — проекции наклонных PK, PL, PM и PN на плоскость основания пирамиды. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OK\perp AB$, $OL\perp BC$, $OM\perp CD$, $ON\perp AD$. Таким образом, углы PKO, PLO, PMO и PNO — линейные углы двугранных углов при основании пирамиды; по условию задачи $\angle PKO=\angle PLO=\angle PMO=\angle PNO=60°$.



а



б

Рис. 112

Прямоугольные треугольники PKO, PLO, PMO и PNO равны по катету и противолежащему углу. Отсюда следует, что $OK=OL=OM=ON$. Так как по доказанному эти равные отрезки перпендикулярны сторонам ромба $ABCD$, то точка O равноудалена от прямых, содержащих стороны ромба, значит, является центром окружности, вписанной в ромб, — точкой пересечения его диагоналей (рис. 112, *б*).

Треугольники AOB, BOC, COD и AOD — ортогональные проекции боковых граней пирамиды APB, BPC, CPD и APD на плоскость основания. По теореме о площади ортогональной проекции многоугольника $S_{AOB}=S_{APB}\cdot\cos 60^\circ$, $S_{BOC}=S_{BPC}\cdot\cos 60^\circ$, $S_{COD}=S_{CPD}\cdot\cos 60^\circ$, $S_{AOD}=S_{APD}\cdot\cos 60^\circ$.

Складывая эти равенства, получим: $S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+$ $+S_{AOD}=\left(S_{APB}+S_{BPC}+S_{CPD}+S_{APD}\right)\cdot\cos 60^\circ$, или $S_{ABCD}=S_{бок}\cdot\cos 60^\circ$.

Отсюда $S_{бок}=\dfrac{S_{ABCD}}{\cos 60^\circ}$. Так как площадь ромба равна половине произведения его диагоналей, то $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 24=120$ (см^2).

Итак, $S_{бок}=\dfrac{120}{\cos 60^\circ}=240$ (см^2).

Ответ: 240 см^2.

Обобщим только что приведенные рассуждения.

Опорная задача
(о пирамиде с равными двугранными углами при основании)

Если все двугранные углы при основании пирамиды равны, то основанием ее высоты является центр окружности, вписанной в основание пирамиды. Докажите.

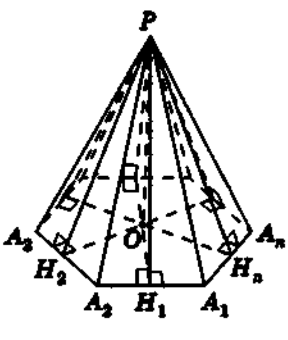


Рис. 118

Решение

Для данной пирамиды $PA_1A_2...A_n$ с высотой PO и высотами боковых граней PH_1, PH_2, ..., PH_n, проведенными из вершины, прямоугольные треугольники POH_1, POH_2, ..., POH_n равны по катету и противолежащему углу (рис. 118, *а*). Отсюда получим: $OH_1=OH_2=$ $=...=OH_n$. Но по теореме о трех перпендикулярах $OH_1\perp A_1A_2$, $OH_2\perp A_2A_3$, ..., $OH_n\perp A_1A_n$.

Таким образом, точка O является центром окружности, вписанной в многоугольник $A_1A_2...A_n$*.

Следует заметить, что если вместо равенства двугранных углов при основании рассматривать равенство углов наклона плоскостей боковых граней пирамиды к плоскости основания, возможна

* Напомним, что мы рассматриваем только те пирамиды, основаниями которых являются выпуклые многоугольники.

геометрическая ситуация, когда высота пирамиды лежит вне пирамиды. Но рассмотрение таких случаев выходит за пределы нашего курса.

Еще одно важное обобщение решенной задачи касается способа вычисления площади боковой поверхности пирамиды.

Опорная задача (об ортогональной проекции боковых граней пирамиды на плоскость основания)

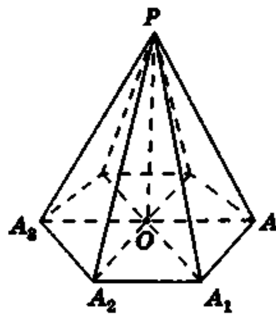
Если все двугранные углы при основании пирамиды равны β, ***то*** $S_{бок}=\frac{S_{осн}}{\cos\beta}$. Докажите.

Решение

Для данной пирамиды $PA_1A_2...A_n$ с высотой PO треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1 являются ортогональными проекциями боковых граней PA_1A_2, PA_2A_3, ..., PA_nA_1 (рис. 113, *б*). Тогда, по формуле площади ортогональной проекции многоугольника, имеем:

$$S_{OA_1A_2}+S_{OA_2A_3}+...+S_{OA_nA_1}=$$
$$=S_{PA_1A_2}\cdot\cos\beta+S_{PA_2A_3}\cdot\cos\beta+...+S_{PA_nA_1}\cdot\cos\beta.$$

Отсюда $S_{осн}=\left(S_{PA_1A_2}+S_{PA_2A_3}+...+S_{PA_nA_1}\right)\cdot\cos\beta$.



б

Рис. 113. Окончание

Окончательно получим: $S_{осн}=S_{бок}\cdot\cos\beta$,

или $S_{бок}=\frac{S_{осн}}{\cos\beta}$.

Эту формулу удобно применять, в частности, для вычисления площади боковой поверхности правильной пирамиды.

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

Если основание пирамиды состоит из ортогональных проекций нескольких боковых граней, каждая из которых образует с плоскостью основания двугранный угол β, ***то сумма*** S ***площадей этих граней вычисляется по формуле*** $S=\frac{S_{осн}}{\cos\beta}$.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Данным фактом можно воспользоваться в задаче п. 9.1, где $S_{PAB}+S_{PBC}=\frac{S_{осн}}{\cos\beta}$.

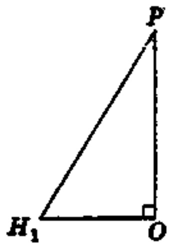


Рис. 114

Обратим внимание на то, что при решении многих задач, связанных с пирамидами, имеющими описанное выше свойство, отдельно рассматривают прямоугольный треугольник PH_1O (рис. 114). В нем PO — высота пирамиды, PH_1 — высота боковой грани, H_1O — радиус окружности, вписанной в основание пирамиды.

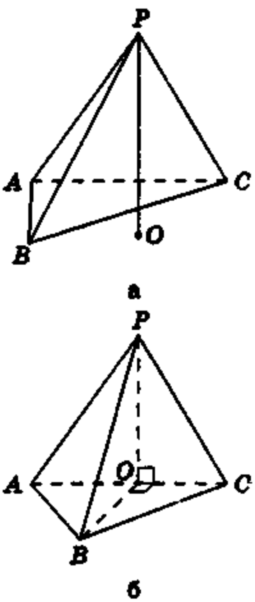


Рис. 115

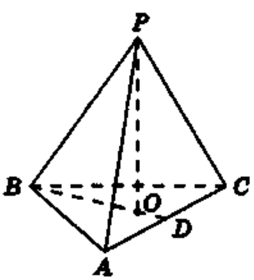


Рис. 116

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

376. Могут ли два боковых ребра пирамиды быть перпендикулярными плоскости основания? Могут ли три боковые грани пирамиды быть перпендикулярными плоскости основания?

377. В пирамиде $PABC$ (рис. 115, *а*, *б*) $PA=PB=PC$, PO — высота пирамиды. Определите вид треугольника ABC по величине углов.

378. Может ли основанием четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны, быть:
а) прямоугольник;
б) ромб с диагоналями 6 и 8;
в) равнобедренная трапеция;
г) прямоугольная трапеция?

379. Все боковые ребра пирамиды равны.
а) Может ли только одна боковая грань данной пирамиды быть перпендикулярной плоскости основания?
б) Могут ли две боковые грани данной пирамиды быть перпендикулярными плоскости основания?

380. В треугольной пирамиде $PABC$ (рис. 116) двугранные углы при основании равны, PO — высота пирамиды. Сравните углы ABD и CBD.

381. Может ли основанием четырехугольной пирамиды, в которой все двугранные углы при основании равны, быть:

а) прямоугольник со сторонами 6 и 8;

б) ромб;

в) равнобедренная трапеция с основаниями 6 и 10 и боковой стороной 9?

382. В пирамиде все боковые ребра равны и все двугранные углы при основании равны. Может ли основанием данной пирамиды быть:

а) прямоугольный треугольник;

б) тупоугольный треугольник;

в) параллелограмм с углом 60°;

г) квадрат?

МОДЕЛИРУЕМ

383*. Нарисуйте на плотной бумаге развертку треугольной пирамиды, основание которой — правильный треугольник, а две боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Сколько граней пирамиды являются прямоугольными треугольниками? Вырежьте развертку и склейте из нее модель пирамиды.

→ **384***. Изготовьте из проволоки модель треугольной пирамиды, в которой все плоские углы при одной вершине прямые, а все ребра, выходящие из этой вершины, равны. Рассматривая разные грани пирамиды в качестве ее оснований, укажите высоту пирамиды в каждом случае.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

385*. Основанием пирамиды $PABC$ является прямоугольный треугольник ABC (рис. 117). Боковые грани пирамиды, содержащие катет AB и гипотенузу AC, перпендикулярны плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом 45°.

а) Докажите, что $\angle PBA = 45°$.

б) Найдите высоту пирамиды, если $AC = 10$ см, $BC = 6$ см.

в) Найдите площадь грани PBC.

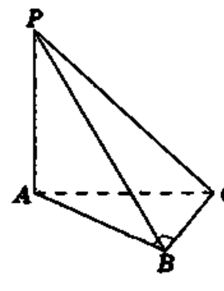


Рис. 117

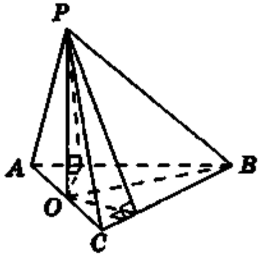


Рис. 118

386. Основанием пирамиды $PABC$ является равнобедренный треугольник ABC (рис. 118). Боковая грань PAC, содержащая основание треугольника, перпендикулярна плоскости ABC, а две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°.

а) Обоснуйте линейные углы двугранных углов, равных 60°.

б) Докажите, что основание высоты пирамиды — точка O — является серединой отрезка AC.

в) Найдите площадь основания пирамиды, если $PO=4\sqrt{3}$ см, $AB=BC=12$ см.

387. Основанием пирамиды является квадрат со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом β.

а) Докажите, что данная пирамида имеет две пары равных боковых граней.

б) Докажите, что сумма площадей боковых граней пирамиды, не перпендикулярных плоскости основания, равна $\frac{a^2}{\cos\beta}$.

в) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

388. Основание четырехугольной пирамиды — ромб, а все ее боковые ребра равны. Докажите, что данная пирамида является правильной.

389. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 12 см и 16 см. Все боковые ребра пирамиды равны 26 см. Найдите высоту пирамиды.

390. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, один из углов которого равен 60°. Высота пирамиды равна 4 см. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь основания пирамиды.

391. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при основании α. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой углы γ. Найдите высоту пирамиды.

392. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под кутом β. Найдите высоту пирамиды.

393. Основанием четырехугольной пирамиды является параллелограмм, а все двугранные углы при основании пирамиды равны. Докажите, что основание данной пирамиды — ромб.

394. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 4 см, 13 см и 15 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

→ **395.** Основанием пирамиды является ромб со стороной 6 см и углом 60°. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

396. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите:

а) площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь ее основания равна 24 см^2;

б) площадь полной поверхности пирамиды, если площадь ее боковой поверхности равна 24 см^2.

→ **397.** Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, основание которой — прямоугольный треугольник с катетами a и b, а все двугранные углы при основании равны α.

Уровень Б

398. В основании пирамиды лежит ромб со стороной 6 см и углом 120°. Две боковые грани, содержащие стороны данного угла, перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

→ **399.** Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом при вершине α и радиусом описанной окружности R. Боковые грани пирамиды, содержащие стороны данного угла, перпендикулярны плоскости основания, а третья грань наклонена к ней под углом β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

400. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим острым углом α. Боковая грань пирамиды, содержащая второй катет, перпендикулярна плоскости основания, а две другие грани наклонены к основанию под углом β.

а) Обоснуйте линейные углы двугранных углов, равных β.

б) Докажите, что основание высоты пирамиды принадлежит биссектрисе угла α.

в) Найдите высоту пирамиды.

→ **401.** Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а третья наклонена к ней под углом β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

402. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция с меньшим основанием 7 см и острым углом 60°. Диагональ данной трапеции является биссектрисой ее острого угла. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определите положение основания высоты пирамиды и найдите длины ее боковых ребер.

→ **403.** В основании пирамиды лежит треугольник с углами α и β, а все боковые ребра пирамиды равны. Перпендикуляр, проведенный из основания высоты пирамиды к боковому ребру, равен m и образует с высотой угол γ. Найдите площадь основания пирамиды.

404. Все двугранные углы при основании треугольной пирамиды равны β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее основание — прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α.

→ **405.** Основание пирамиды — треугольник, две стороны которого равны b и образуют угол α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

406. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция с острым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее высота равна H.

→ **407.** Основанием пирамиды является ромб с тупым углом α. Все высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны l и образуют с высотой пирамиды углы β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Уровень В

408. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α. Боковая грань, содержащая основание треугольника, перпендикулярна плоскости основания, а две другие грани наклонены к основанию под углом β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

→ **409.** Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 21 см и 28 см. Боковая грань пирамиды, содержащая гипотенузу треугольника, перпендикулярна плоскости основания, а две другие грани наклонены к основанию под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

410. Основание пирамиды — прямоугольник. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания, а радиус окружности, вписанной в эту грань, равен r. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если все остальные ее боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β.

411. Основание пирамиды — ромб с острым углом α. Две грани пирамиды, содержащие стороны данного угла, перпендикулярны плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β. Точка высоты пирамиды, находящаяся на расстоянии m от вершины пирамиды, равноудалена от плоскости основания и плоскостей наклонных боковых граней. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

→ **412.** Основание пирамиды — прямоугольная трапеция с большей диагональю d. Две боковые грани, содержащие стороны острого угла трапеции, перпендикулярны плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β. Найдите высоту пирамиды.

413. В основании пирамиды, все боковые ребра которой равны, лежит прямоугольный треугольник с острым углом α и радиусом вписанной окружности r. Отрезок, соединяющий середину высоты пирамиды с вершиной основания, наклонен к плоскости основания под углом β. Найдите высоту пирамиды.

414. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция с острым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β, а основание высоты пирамиды удалено от боковой грани на расстояние d. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

→ **415.** Основание пирамиды — ромб с тупым углом α, а все двугранные углы при основании равны β. Точка высоты пирамиды, находящаяся на расстоянии a от плоскости основания, равноудалена от вершины пирамиды и стороны основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Повторение перед изучением § 10

Теоретический материал

- аксиома пересечения плоскостей (10 класс)
- параллельность прямой и плоскости (10 класс)
- параллельность плоскостей (10 класс)

Задачи

416. Прямая a лежит в плоскости α. Плоскость β, параллельная прямой a, пересекает плоскость α по прямой c. Докажите, что $c \parallel a$.

417. Точка M — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте точку пересечения плоскости ABC:

а) с прямой B_1M; б) с прямой C_1M.

§ 10. СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

10.1. Секущая плоскость и сечение. Сечения призмы

С простейшими случаями сечений тетраэдра и куба вы уже встречались в 10 классе. Придадим представлениям о сечениях геометрических тел определенную математическую строгость.

Пусть в пространстве даны тело и некоторая плоскость. Если хотя бы две точки тела лежат по разные стороны от данной плоскости, то говорят, что плоскость пересекает тело. В таком случае она является секущей плоскостью данного тела. Например, на рисунке 119 плоскость α является секущей плоскостью тела F.

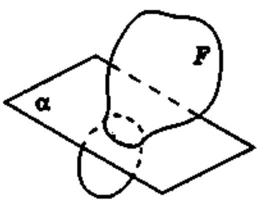


Рис. 119. Сечение тела плоскостью

Определение

Сечением геометрического тела плоскостью называется фигура, состоящая из всех общих точек тела и секущей плоскости.

На рисунке 119 закрашенная фигура является сечением тела F плоскостью α.

Если данное тело — многогранник, то секущая плоскость пересекает его грани по отрезкам. Эти отрезки ограничивают плоский многоугольник, являющийся общей частью данного многогранника и секущей плоскости. Коротко говорят, что *сечением многогранника является многоугольник* (имея в виду соответствующий плоский многоугольник).

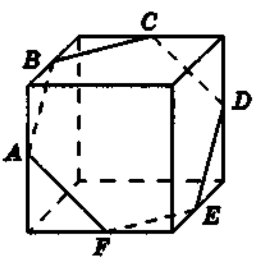


Рис. 120. Сечение куба

Очевидно, что если многогранник имеет n граней, то количество сторон многоугольника, являющегося сечением данного многогранника, не превышает n. Например, сечением параллелепипеда (он имеет 6 граней) может быть только треугольник, четырехугольник, пятиугольник или шестиугольник. На рисунке 120 сечение куба — шестиугольник $ABCDEF$.

Для построения сечения многогранника достаточно построить все точки пересечения секущей плоскости с ребрами данного многогранника, после чего соединить отрезками каждые две построенные точки, принадлежащие одной грани. Напомним, что если секущая плоскость пересекает плоскости двух параллельных граней, то прямые пересечения параллельны. Так, на рисунке 120 $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$.

Задача

Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки M, N и K (рис. 121, *а*).

Решение

Так как точки M и N принадлежат грани AA_1B_1B, а точки N и K — грани BB_1C_1C, то MN и NK — прямые пересечения секущей плоскости с плоскостями этих граней. Следовательно, отрезки MN и NK — стороны искомого сечения (рис. 121, *б*).

Так как грани куба BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, то секущая плоскость пересекает их по параллельным прямым. Проведем через точку M прямую, параллельную NK.

Пусть G — точка пересечения этой прямой с ребром AD (рис. 121, *в*). Рассуждая аналогично, проводим через точку K прямую, параллельную MN.

Пусть T — точка пересечения проведенной прямой с ребром CD. Так как точки G и T принадлежат одной грани $ABCD$, то отрезок GT — сторона искомого сечения. Следовательно, искомым сечением является пятиугольник $MNKTG$ (рис. 121, *г*).

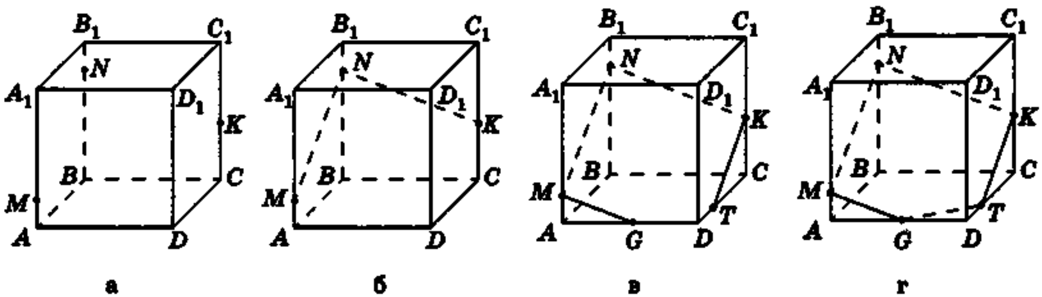


Рис. 121. Построение сечения куба

Подробнее о построении сечений речь пойдет в п. 10.3.

Заметим, что часто задачи на вычисление площадей сечений объединяют в себе задачи на вычисление и на построение: действительно, при решении таких задач необходимо не только вычислить площадь некоторого сечения, но и описать его построение и обосновать, что полученное сечение является искомым.

Задача

В правильной четырехугольной призме через диагональ одного основания и противолежащую ему вершину другого основания проведено сечение плоскостью Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если данное сечение образует с плоскостью основания угол α.

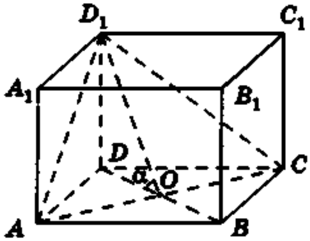


Рис. 122

Решение

Пусть дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 122). Рассмотрим сечение, проходящее через диагональ основания AC и вершину D_1. Так как точки C и D_1 принадлежат грани CC_1D_1D, то CD_1 — прямая пересечения секущей плоскости с плоскостью этой грани.

Рассуждая аналогично, определяем, что прямые AC и AD_1 являются прямыми пересечения секущей плоскости с плоскостями $ABCD$ и AA_1D_1D. Значит, треугольник ACD_1 — искомое сечение.

По условию $S_{ACD_1} = Q$. Пусть O — точка пересечения AC и BD. Так как $DO \perp AC$ и $D_1D \perp (ABC)$, то $D_1O \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах. Следовательно, угол D_1OD является углом между плоскостями ACD_1 и $ABCD$. По условию $\angle D_1OD = \alpha$. Пусть ребро основания равно a. Так как $ABCD$ — квадрат, $P_{осн} = 4a$. Из прямоугольного треугольника D_1DO ($\angle D = 90°$, $DO = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $\angle D_1OD = \alpha$) имеем: $DD_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha$. Отсюда $S_{бок} = P_{осн} \cdot h = \frac{4a^2}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha$. По формуле площади ортогональной проекции многоугольника $S_{ADC} = Q\cos\alpha$, откуда $S_{ABCD} = 2Q\cos\alpha = a^2$. Итак, $a = \sqrt{2Q\cos\alpha}$.

Окончательно получаем: $S_{бок} = \frac{4 \cdot 2Q\cos\alpha}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha = 4\sqrt{2}Q\sin\alpha$.

Ответ: $4\sqrt{2}Q\sin\alpha$.

Рассмотрим подробнее простейшие сечения призм.

Любое сечение призмы плоскостью, параллельной боковому ребру, является параллелограммом. Так, параллелограммом является ***диагональное сечение призмы*** — сечение плоскостью, проходящей через боковое ребро и диагональ основания. На рисунке 123 параллелограмм AA_1C_1C — диагональное сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Очевидно, что диагональное сечение прямой призмы представляет собой прямоугольник.

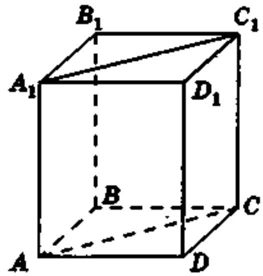
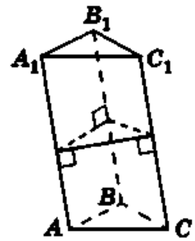
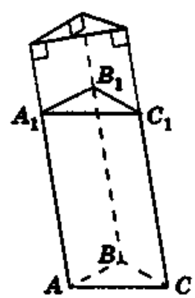


Рис. 123. Диагональное сечение призмы

При изучении наклонных призм особую роль играет сечение призмы плоскостью, пересекающей все боковые ребра и перпендикулярной этим ребрам (рис. 124, *а*). Но существуют наклонные призмы, у которых такого сечения может и не быть. Поэтому будем считать ***перпендикулярным сечением*** призмы многоугольник, вершинами которого являются точки пересечения плоскости, перпендикулярной боковым ребрам призмы, с прямыми, содержащими эти ребра (рис. 124, *а*, *б*).



а



б

Рис. 124. Перпендикулярное сечение наклонной призмы

Теорема (формула площади боковой поверхности наклонной призмы)

Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро:

$$S_{бок} = P_{\perp} \cdot l.$$

Доказательство

□ Пусть перпендикулярное сечение наклонной n-угольной призмы — n-угольник, стороны которого равны $h_1, h_2, \dots, h_n$. Примем за основания параллелограммов, являющихся боковыми гранями призмы, боковые ребра длиной l. Очевидно, что соответствующие стороны перпендикулярного сечения будут высотами этих параллелограммов. Следовательно,

$$S_{бок} = h_1 l + h_2 l + \dots + h_n l = (h_1 + h_2 + \dots + h_n) l = P_{\perp} \cdot l.$$

Теорема доказана. ■

10.2. Сечения пирамиды. Усеченная пирамида

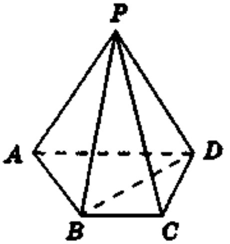


Рис. 125. Диагональное сечение пирамиды

Рассмотрим простейшие сечения пирамид.

Любое сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ее вершину, является треугольником. Так, треугольником является ***диагональное сечение пирамиды*** — сечение плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и диагональ ее основания. На рисунке 125 треугольник PBD — диагональное сечение пирамиды $PABCD$. Важным случаем сечения пирамиды является сечение, параллельное плоскости основания.

Теорема (о сечении пирамиды, параллельном плоскости основания)

Плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды и пересекающая ее боковые ребра, отсекает пирамиду, подобную данной.

Доказательство

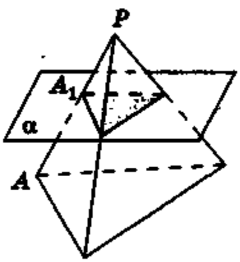


Рис. 126. К доказательству теоремы о сечении пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания

□ Пусть дана пирамида с вершиной P (рис. 126). Через точку A_1 на боковом ребре PA проведена секущая плоскость α, параллельная основанию пирамиды. Рассмотрим гомотетию данной пирамиды с центром P и коэффициентом $k=\frac{PA_1}{PA}$. При этой гомотетии плоскость основания пирамиды переходит в параллельную плоскость, содержащую точку A_1, то есть в плоскость α, а вся пирамида — в пирамиду, отсекаемую от данной плоскостью α. Так как гомотетия является преобразованием подобия, то отсекаемая плоскостью α пирамида подобна данной. ■

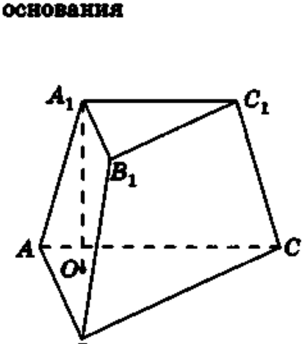


Рис. 127. Усеченная треугольная пирамида

✸ Рассмотрим теперь другую часть пирамиды, которую отсекает плоскость сечения, параллельная основанию. Эта часть представляет собой многогранник, который называют ***усеченной пирамидой***. Две ее грани (***основания усеченной пирамиды***) — подобные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани (***боковые грани усеченной пирамиды***) — трапеции.

На рисунке 127 изображена усеченная треугольная пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$ и боковыми гранями AA_1B_1B, BB_1C_1C и CC_1A_1A. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1, соединяющие соответствующие вершины оснований, являются ***боковыми ребрами усеченной пирамиды.***

Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания. Например, на рисунке 127 высотой усеченной пирамиды является отрезок A_1O.

Изображение усеченной пирамиды обычно строят таким образом. Сначала изображают соответствующую полную пирамиду, а затем строят ее сечение плоскостью, параллельной плоскости основания.

Если секущая плоскость правильной пирамиды параллельна основанию, то в результате пересечения получается ***правильная усеченная пирамида.*** Основаниями такой пирамиды являются правильные подобные многоугольники, а отрезок, соединяющий центры этих многоугольников, является высотой пирамиды. Очевидно, что боковые ребра правильной усеченной пирамиды равны, значит, ее боковые грани — равнобедренные трапеции. Высоты этих трапеций называются ***апофемами правильной усеченной пирамиды.*** Например, на рисунке 128 изображена правильная четырехугольная усеченная пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с высотой OO_1 и апофемой A_1M.

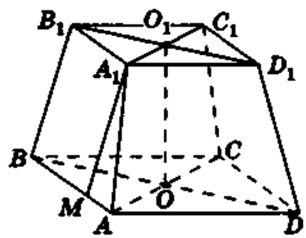


Рис. 128. Правильная четырехугольная усеченная пирамида

Теорема (формула площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды)

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему:

$$S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l.$$

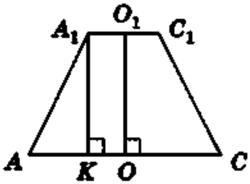
Доказательство

□ Пусть стороны оснований правильной n-угольной усеченной пирамиды с апофемой l равны a_1 и a_2. Тогда каждая ее боковая грань — равнобедренная трапеция с основаниями a_1 и a_2 и высотой l. Площадь одной грани равна $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot l$.

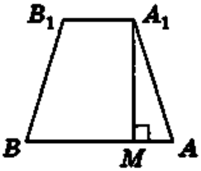
Отсюда площадь боковой поверхности данной усеченной пирамиды $S_{бок} = n \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot l = \frac{na_1 + na_2}{2} \cdot l$, где n — количество вершин основания пирамиды. Так как произведения na_1 и na_2 равны периметрам P_1 и P_2 оснований пирамиды, то $S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$. Теорема доказана. ■

Задача

Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональное сечение — трапеция с основаниями $2\sqrt{2}$ см и $8\sqrt{2}$ см и высотой $\sqrt{7}$ см.



а



б

Рис. 129

Решение

Пусть трапеция AA_1C_1C (рис. 129, *а*) — диагональное сечение правильной четырехугольной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 128), $A_1C_1 = 2\sqrt{2}$ см, $AC = 8\sqrt{2}$ см, A_1K — высота трапеции, $A_1K = \sqrt{7}$ см.

Так как данная пирамида правильная, то трапеция AA_1C_1C равнобедренная; значит, $AK = (AC - A_1C_1) : 2$ (обоснуйте это самостоятельно), $AK = 3\sqrt{2}$ см. Тогда из треугольника AA_1K ($\angle K = 90°$) по теореме Пифагора $AA_1 = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = 5$ (см).

Рассмотрим теперь боковую грань пирамиды — равнобедренную трапецию BB_1A_1A (рис. 129, *б*). Так как основания данной пирамиды — квадраты с диагоналями $2\sqrt{2}$ см и $8\sqrt{2}$ см, то $AB = 8$ см, $A_1B_1 = 2$ см — стороны оснований пирамиды. Тогда если A_1M — апофема данной пирамиды, то $AM = (AB - A_1B_1) : 2$, $AM = 3$ см. Из треугольника AA_1M ($\angle M = 90°$) по теореме Пифагора $A_1M = 4$ см.

Следовательно, $S_{бок} = \frac{4 \cdot 2 + 4 \cdot 8}{2} \cdot 4 = 80$ (см^2).

Ответ: 80 см^2.

Следует знать, что для проведения вычислений при решении задач об усеченных пирамидах иногда удобно рассматривать такие фрагменты их сечений:

• фрагмент сечения, проходящего через боковое ребро и центры окружностей, описанных около оснований,— в случае, если боковые ребра пирамиды равны (рис. 130, *а*, *б*):
OO_1 — высота пирамиды,
OA и O_1A_1 — радиусы окружностей, описанных около оснований,
AA_1 — боковое ребро,
$\angle A_1AO$ — угол наклона бокового ребра к плоскости большего основания;

• фрагмент сечения, проходящего через центры окружностей, вписанных в основания, перпендикулярно ребру основания,— в случае, если боковые грани наклонены к основанию под равными углами (рис. 130, *в*, *г*):
OO_1 — высота пирамиды,
OD и O_1D_1 — радиусы окружностей, вписанных в основания,
DD_1 — высота боковой грани,
$\angle D_1DO$ — линейный угол двугранного угла при большем основании.

Заметим также, что при решении некоторых задач целесообразно достроить данную усеченную пирамиду до полной.

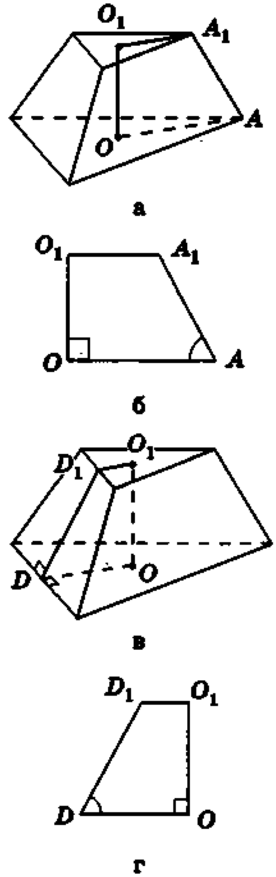


Рис. 130. Фрагменты сечений усеченной пирамиды

10.3*. Построение сечений многогранников

При решении задач на построение сечений многогранников часто возникает необходимость построить прямую пересечения секущей плоскости с плоскостью грани многогранника. Такую прямую называют ***следом*** секущей плоскости на плоскости данной грани. След легко построить, если известны две точки плоскости данной грани, принадлежащие секущей плоскости. Но такие точки не всегда даны — для их нахождения применяют специальный ***метод следов***.

Рассмотрим данный метод на примере уже известной вам задачи из п. 10.1.

Пусть требуется построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки M, N и K (рис. 131, *а*). Так как точки M и N принадлежат грани AA_1B_1B, а точки N и K — грани BB_1C_1C, то отрезки MN и NK — стороны искомого сечения.

Построим теперь точку пересечения прямой MN с плоскостью основания ABC. Для этого определим прямую пересечения грани AA_1B_1B, в которой лежит прямая MN, с плоскостью ABC — это прямая AB. Построим точку E — точку пересечения прямых MN и AB (рис. 131, *б*), которая и будет точкой пересечения прямой MN с плоскостью основания ABC. Аналогично построим точку F — точку пересечения прямой NK с плоскостью ABC, которая является точкой пересечения прямых NK и BC. Прямая EF (рис. 131, *в*) — след секущей плоскости MNK на плоскости основания ABC. Как видим, эта прямая пересекает ребра AD и CD в точках G и T соответственно. Следовательно, отрезок GT — сторона искомого сечения.

Так как точки M и G принадлежат грани AA_1D_1D, а точки T и K — грани CC_1D_1D, то остается провести отрезки MG и TK и получить искомое сечение — пятиугольник $MNKTG$ (рис. 131, *г*).

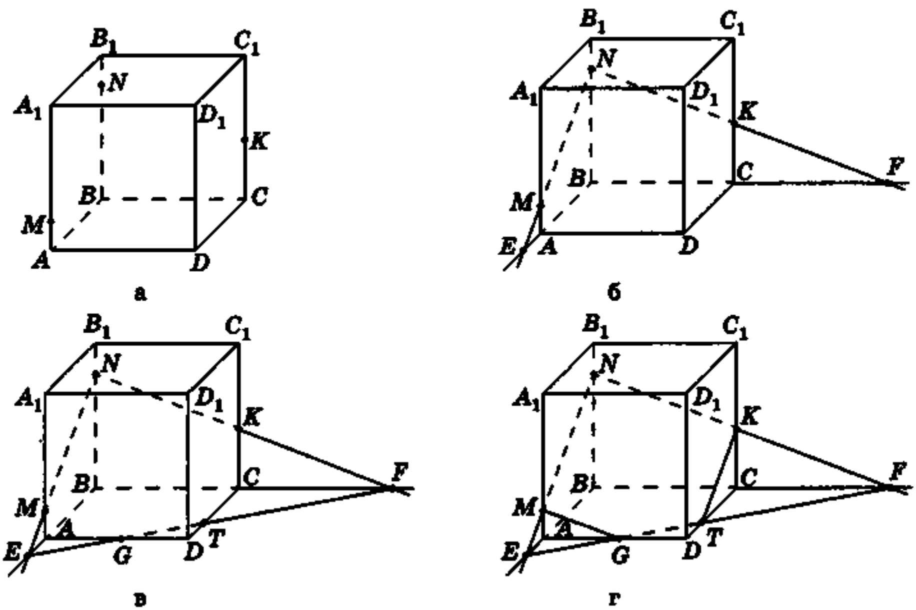
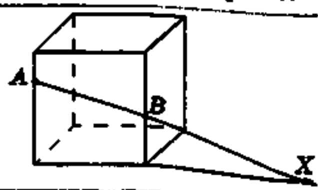
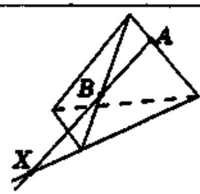
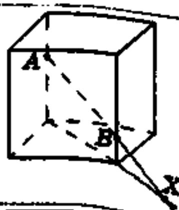
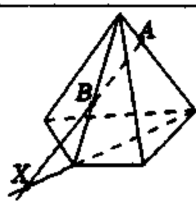
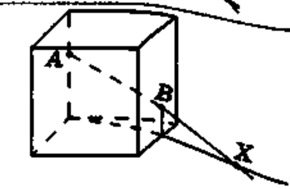
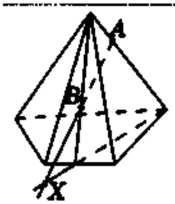
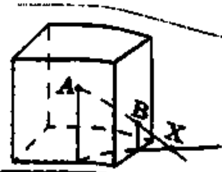
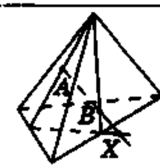
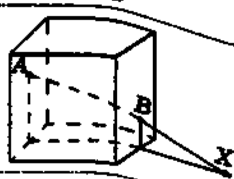
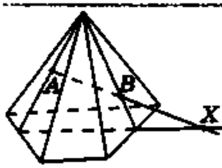
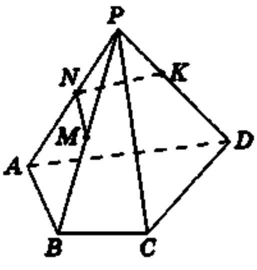


Рис. 131. Построение сечения куба методом следов

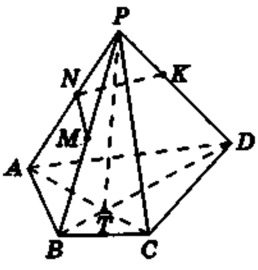
Как видим, самый «тонкий» момент применения метода следов — построение точки пересечения прямой, принадлежащей секущей плоскости, с плоскостью грани многогранника. Для этого используют известное свойство параллельного проектирования: проекцией прямой является прямая, причем если данная прямая не параллельна плоскости проекции, то она пересекается со своей проекцией. Обобщим различные случаи таких построений для призмы и пирамиды, представив их в виде таблицы.

Построение точки X пересечения прямой AB с плоскостью основания многогранника

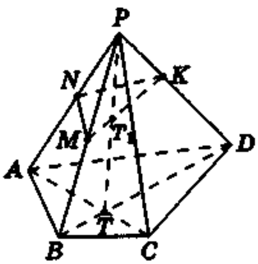
Расположение точек A и B	Построение в призме	Построение в пирамиде
На боковых ребрах одной боковой грани		
На боковых ребрах, не принадлежащих одной грани		
На боковой грани и на ребре, не принадлежащем данной грани		
На двух соседних боковых гранях		
На двух боковых гранях, не являющихся соседними		



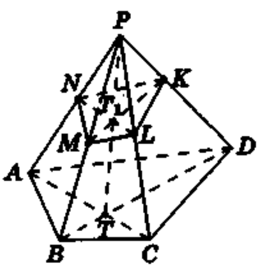
а



б



в



г

Рис. 132. Построение сечения методом проекций

Заметим, что метод следов не всегда удобно применять, если построенная прямая сечения «почти параллельна» плоскости основания многогранника (то есть пересекает ее под углом, близким к 0°),— в таком случае искомая точка пересечения X может выйти за пределы рисунка.

Рассмотрим еще один метод, с помощью которого можно строить сечения многогранников, не выходя за их пределы.

Пусть требуется построить сечение четырехугольной пирамиды $PABCD$ плоскостью, проходящей через точки M, N и K на ребрах пирамиды (рис. 132, *а*). Сначала, как и в предыдущих случаях, построим отрезки MN и NK, которые являются сторонами искомого сечения. Но для построения точки пересечения секущей плоскости MNK с ребром PC применим метод, отличный от метода следов.

Проведем диагонали основания AC и BD и обозначим точку их пересечения T. Соединим полученную точку T с вершиной пирамиды P (рис. 132, *б*). Плоскость диагонального сечения PBD и секущая плоскость MNK имеют общие точки M и K, а значит, пересекаются по прямой MK. Прямые MK и PT пересекаются (объясните почему) в некоторой точке T_1 (рис. 132, *в*), также принадлежащей секущей плоскости MNK.

Аналогично плоскости PAC и MNK имеют общие точки N и T_1, а значит, пересекаются по прямой NT_1. Прямая NT_1 пересекает ребро PC в некоторой точке L (рис. 132, *г*), которая также является общей точкой плоскостей MNK и PAC, а следовательно, принадлежит искомому сечению. Соединив точку L с точками M и K, получим искомое сечение $MNKL$.

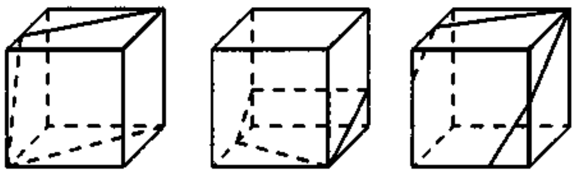
Описанный метод построения сечений называют ***методом внутреннего проектирования*** или ***методом проекций***. Такое название несложно объяснить: действительно, точка T основания пирамиды является проекцией точки сечения T_1 на плоскость основания в направлении прямой PT; таким образом, получив сначала проекцию точки T_1, мы «восстановили» и саму точку.

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

418*. Может ли сечением тетраэдра быть треугольник; четырехугольник; пятиугольник?

419. На рисунке 133, *а—в* изображены сечения куба. Есть ли на этих изображениях ошибки? В чем они заключаются?



а б в

Рис. 133

420*. Четырехугольник AA_1C_1C — диагональное сечение прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Определите вид этого четырехугольника.

421. Может ли диагональным сечением правильной четырехугольной пирамиды быть:

а) равносторонний треугольник;

б) прямоугольный треугольник;

в) треугольник со сторонами 3, 4 и 5?

422. Через середину высоты пирамиды проведено сечение, параллельное плоскости основания. Во сколько раз площадь сечения меньше площади основания?

423. Основание пирамиды — правильный многоугольник. Обязательно ли сечение, параллельное основанию, отсекает от данной пирамиды:

а) правильную усеченную пирамиду;

б) пирамиду, подобную данной?

424. Является ли усеченная пирамида частным случаем пирамиды? Ответ обоснуйте.

МОДЕЛИРУЕМ

425.* Изготовьте из проволоки модель куба. С помощью нити смоделируйте сечение куба, имеющее форму треугольника; четырехугольника; пятиугольника; шестиугольника.

426.* Изготовьте модель треугольной пирамиды. Разрежьте модель так, чтобы плоскость сечения была параллельна плоскости основания пирамиды. Опишите элементы полученной усеченной пирамиды.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

427.* Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через:

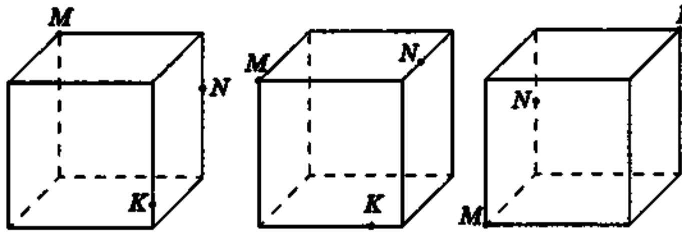
а) ребра A_1B_1 и CD;

б) вершину B_1 и диагональ основания AC;

в) ребро CC_1 и середину ребра A_1B_1;

г) середины ребер AD и A_1D_1 параллельно диагонали основания AC.

428.* Постройте сечение данного куба плоскостью MNK (рис. 134, *а—в*).



а б в

Рис. 134

429.* Постройте сечение правильной треугольной пирамиды $PABC$ плоскостью, проходящей через:

а) ребро AB и середину ребра PC;

б) вершину P и высоту основания AD;

в) середины ребер PA и BC параллельно ребру AC.

430. Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с боковой стороной 13 см и основанием 24 см. Высота призмы равна 10 см. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и биссектрису угла между боковыми сторонами основания.

431. Диагональное сечение правильной четырехугольной призмы — квадрат площадью 32 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

432. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 9 см и 12 см. Найдите площадь диагонального сечения параллелепипеда, если его диагональ образует с плоскостью основания угол 45°.

433. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а боковое ребро 3 см. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину верхнего основания и противолежащую сторону нижнего основания.

434. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь сечения BC_1D равна 15 см^2, а площадь основания — 18 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

435. Боковое ребро наклонной призмы равно 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее перпендикулярное сечение — прямоугольный треугольник с катетами 8 см и 15 см.

436. Перпендикулярное сечение наклонной призмы — треугольник со сторонами 5 см и 16 см и углом между ними 120°. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее боковое ребро равно наибольшей стороне сечения.

437. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ точки K, M и N — середины ребер AB, CD и PB соответственно.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью KMN. Определите вид сечения.

б) Найдите площадь построенного сечения, если расстояние от точки N до прямой KM равно 5 см, а сторона основания пирамиды 8 см.

438. Все ребра тетраэдра $PABC$ равны 6 см. Найдите площадь сечения, проведенного через ребро BC и середину ребра PA.

439. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b и наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите плоскость сечения, проведенного через боковое ребро и высоту пирамиды.

440. Изобразите правильную четырехугольную усеченную пирамиду. Обоснуйте:

а) угол наклона бокового ребра к плоскости основания;

б) линейный угол двугранного угла при большем основании пирамиды.

441. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4 см, а стороны оснований — 2 см и 8 см. Найдите боковое ребро и апофему пирамиды.

442. **Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны $4\sqrt{3}$ см и $6\sqrt{3}$ см. Найдите боковое ребро пирамиды, если оно наклонено к плоскости большего основания под углом 60°.**

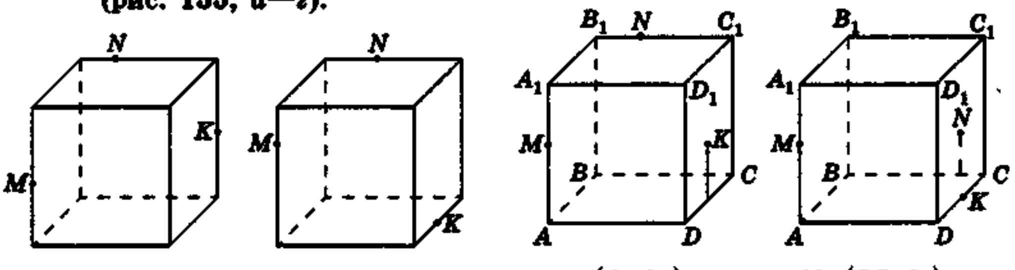
443. **Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной усеченной пирамиды со сторонами оснований 4 см и 10 см и апофемой 5 см.**

444. **Колпак кузнечного горна имеет форму правильной четырехугольной усеченной пирамиды (без оснований) со сторонами оснований 20 см и 80 см и высотой 40 см. Сколько квадратных дециметров жести потребуется для изготовления колпака, если на швы и отходы уйдет 20 % материала?**

445. **Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной усеченной пирамиды со сторонами оснований 4 см и 14 см и боковым ребром 13 см.**

Уровень Б

446. **Постройте сечение данного куба плоскостью *MNK* (рис. 135, *а—г*).**

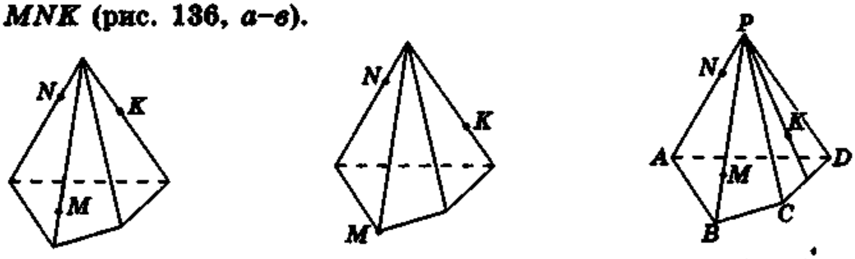


$K \in (CDD_1)$ $\quad$ $N \in (BB_1C_1)$

а $\quad$ б $\quad$ в $\quad$ г

Рис. 135

447. **Постройте сечение данной четырехугольной пирамиды плоскостью *MNK* (рис. 136, *а–в*).**



$K \in (PCD)$

а $\quad$ б $\quad$ в

Рис. 136

448. В прямоугольном параллелепипеде через диагональ основания проведено сечение, параллельное диагонали параллелепипеда. Найдите площадь сечения, если стороны основания параллелепипеда равны 6 см и 8 см, а высота 24 см.

→ 449. Через сторону основания и середину бокового ребра правильной треугольной призмы проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна H.

450. Основание прямой призмы — параллелограмм со сторонами 7 см и 9 см и диагональю 8 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если площадь ее наибольшего диагонального сечения равна 56 $см^2$.

451. Докажите, что сумма квадратов площадей диагональных сечений прямого параллелепипеда равна сумме квадратов площадей всех его боковых граней.

452. Две боковые грани наклонной треугольной призмы взаимно перпендикулярны. Их общее боковое ребро равно 10 см и удалено от других боковых ребер на 7 см и 24 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

→ 453. Расстояния между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равны 10 см, 35 см и 39 см, а боковое ребро призмы равно диаметру окружности, вписанной в перпендикулярное сечение. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

454. В правильной четырехугольной пирамиде через диагональ основания проведено сечение, параллельное скрещивающемуся с этой диагональю боковому ребру. Найдите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 8 см, а высота 7 см.

→ 455. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании β. Найдите площадь сечения, проходящего через середины двух сторон основания параллельно боковой грани, содержащей третью сторону.

456. Высота пирамиды равна $8\sqrt{2}$ м. На каком расстоянии от вершины пирамиды находится параллельное основанию сечение, площадь которого равна половине площади основания пирамиды?

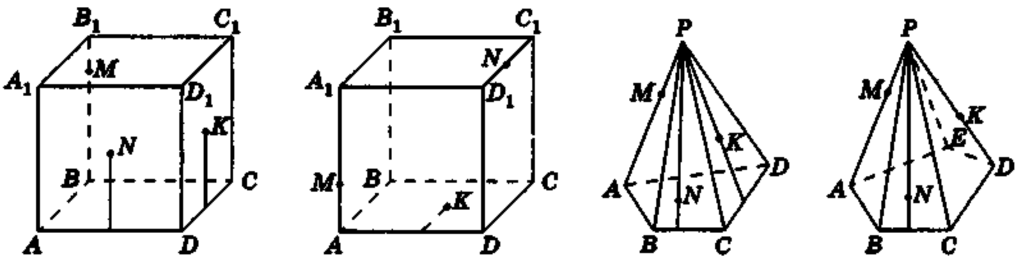
→ 457. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом α. Отрезок, соединяющий основание высоты пирамиды с серединой бокового ребра, равен m. Найдите площадь параллельного основанию сечения, которое делит высоту пирамиды в отношении $3:4$, начиная от вершины.

458. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна $20\sqrt{2}$ см^2, высота — 4 см, а боковое ребро — $\sqrt{34}$ см.

→ **459.** Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны a и b $(a<b)$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если двугранный угол при ее большем основании равен α.

Уровень В

460. Постройте сечение данной фигуры плоскостью MNK (рис. 187, *а–г*).



$N\in(ADD_1)$, $K\in(CDD_1)$ — а

$K\in(ABC)$ — б

$N\in(PBC)$, $K\in(PCD)$ — в

$N\in(PBC)$ — г

Рис. 187

461. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер A_1B_1, AD и CC_1. Определите вид построенного сечения и найдите его площадь, если ребро куба равно a.

→ **462.** Площади диагональных сечений прямого параллелепипеда, основанием которого является ромб, равны 42 см^2 и 56 см^2. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

463. Найдите площади диагональних сечений правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания a и двугранным углом при основании 45°.

→ **464.** Боковая грань и диагональное сечение правильной четырехугольной пирамиды равновелики. Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

465. Сторона основания и боковое ребро правильной треугольной пирамиды равны 15 см и 14 см соответственно. Найдите площадь сечения, проходящего через середину медианы основания перпендикулярно этой медиане.

→ **466.** Две боковые грани пирамиды, основанием которой является квадрат, перпендикулярны плоскости основания. Площади диагональных сечений пирамиды равны 48 см^2 и 80 см^2. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

467. Найдите площади двух сечений пирамиды, параллельных основанию, если данные сечения делят боковое ребро на три равные части, а разность их площадей составляет 12 см^2.

→ **468.** Площадь основания пирамиды равна 108 см^2. Найдите высоту пирамиды, если расстояние между двумя сечениями, параллельными основанию, равно 8 см, а площади данных сечений — 12 см^2 и 27 см^2.

469. Площади оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны $9\sqrt{3}$ см^2 и $36\sqrt{3}$ см^2. Расстояние от вершины меньшего основания до противолежащей стороны большего основания равно 7 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

→ **470.** Площади оснований и диагонального сечения правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 16 см^2, 324 см^2 и 88 см^2 соответственно. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Повторение перед изучением § 11

Теоретический материал

- правильные многоугольники (9 класс)
- многогранные углы (11 класс, § 7)
- симметрия в пространстве (11 класс, § 2)

Задачи

471. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен 60°. Может ли значение n быть большим 5?

472. Найдите площадь равностороннего треугольника, в котором разность радиусов описанной и вписанной окружностей составляет $\sqrt{3}$ см.

§ 11. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

11.1. Виды правильных многогранников

Как известно, в планиметрии для любого натурального числа n, не меньшего 3, существует правильный n-угольник — многоугольник, в котором все стороны равны и все углы равны. Пространственными аналогами правильных многоугольников являются правильные многогранники.

Определение

Правильным многогранником называется выпуклый многогранник, у которого все грани являются равными правильными многоугольниками и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер.

Примером правильного многогранника является куб: все его грани — равные квадраты, а в каждой вершине сходится по три ребра.

Из данного определения следует, что все ребра правильного многогранника равны. Можно также доказать, что все двугранные углы правильного многогранника, содержащие две грани с общим ребром, равны.

С древних времен человечеству были известны пять видов правильных многогранников, причем доказано, что других видов правильных многогранников не существует. Прежде чем рассмотреть каждый вид отдельно, обоснуем, что *гранями правильного многогранника могут быть только треугольники, четырехугольники или пятиугольники*. Действительно, при $n \geq 6$ угол правильного n-угольника не меньше $120°$ (убедитесь в этом самостоятельно). Так как любой многогранный угол правильного многогранника имеет не меньше трех граней, то при условии $n \geq 6$ сумма плоских углов многогранного угла будет не меньше чем $120° \cdot 3 = 360°$, что противоречит доказанному свойству суммы плоских углов выпуклого многогранного угла. Значит, вершина правильного многогранника может быть вершиной либо трех, четырех или пяти равносторонних треугольников, либо трех квадратов, либо трех правильных пятиугольников.

> Названия правильных многогранников имеют древнегреческое происхождение.
> В переводе с греческого **тетраэдр** — четырехгранник, **гексаэдр** — шестигранник, **октаэдр** — восьмигранник, **додекаэдр** — двенадцатигранник, **икосаэдр** — двадцатигранник.

Перейдем к описанию каждого из пяти видов правильных многогранников.

Правильный тетраэдр — это многогранник, поверхность которого состоит из четырех равносторонних треугольников (рис. 138). В каждой вершине правильного тетраэдра сходится по три ребра. Заметим, что правильный тетраэдр является правильной треугольной пирамидой, у которой боковые ребра равны ребрам основания.

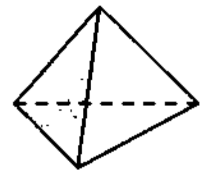


Рис. 138. Правильный тетраэдр

Куб (правильный гексаэдр) — шестигранник, поверхность которого состоит из шести квадратов (рис. 139). В каждой вершине куба сходится по три ребра. Напомним, что куб является правильной четырехугольной призмой, у которой боковые ребра равны ребрам основания.

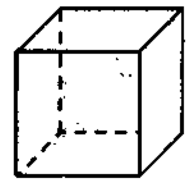


Рис. 139. Куб (правильный гексаэдр)

Правильный октаэдр — восьмигранник, гранями которого являются равносторонние треугольники (рис. 140). В отличие от правильного тетраэдра, в каждой вершине правильного октаэдра сходится по четыре ребра.

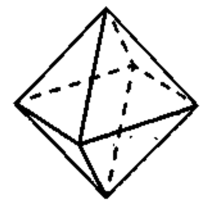


Рис. 140. Правильный октаэдр

Правильный додекаэдр — многогранник, поверхность которого состоит из двенадцати правильных пятиугольников (рис. 141). Каждая вершина правильного додекаэдра является вершиной трех правильных пятиугольников, то есть из нее выходит по три ребра.

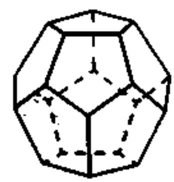


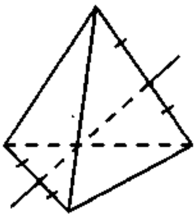
Рис. 141. Правильный додекаэдр

Правильный икосаэдр — многогранник, поверхность которого состоит из двадцати равносторонних треугольников (рис. 142). Каждая вершина правильного икосаэдра является вершиной пяти правильных треугольников, то есть в ней сходится по пять ребер.

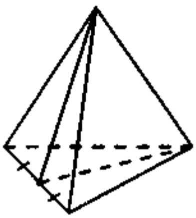
Рис. 142. Правильный икосаэдр

Рассмотрим элементы симметрии некоторых правильных многогранников.

Правильный тетраэдр не имеет центра симметрии. Осью симметрии этого многогранника является прямая, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер. Таким образом, правиль-

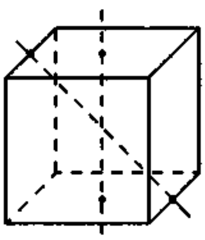


а

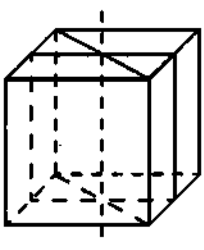


б

Рис. 143. Элементы симметрии правильного тетраэдра



а



б

Рис. 144. Элементы симметрии куба

ный тетраэдр имеет три оси симметрии (рис. 143, *а*). Плоскость симметрии правильного тетраэдра проходит через его ребро перпендикулярно скрещивающемуся с ним ребру (рис. 143, *б*). Итак, правильный тетраэдр имеет шесть плоскостей симметрии.

Куб имеет один центр симметрии — точку пересечения его диагоналей. Осями симметрии куба являются прямые, проходящие через центры двух противолежащих граней (таких прямых три), и прямые, проходящие через середины двух параллельных ребер, не принадлежащих одной грани (таких прямых шесть). Итак, куб имеет девять осей симметрии, каждая из которых проходит через его центр симметрии (рис. 144, *а*).

Плоскостями симметрии куба являются три плоскости, каждая из которых проходит через середины четырех параллельных ребер, и шесть плоскостей, проходящих через пару параллельных ребер, не принадлежащих одной грани. Таким образом, куб имеет девять плоскостей симметрии (рис. 144, *б*).

Остальные правильные многогранники имеют центр симметрии и несколько осей и плоскостей симметрии (попробуйте определить их число самостоятельно).

Свойства правильных многогранников издавна привлекают ученых, строителей, архитекторов, ювелиров. Великий древнегреческий философ Платон связывал с правильными многогранниками четыре природные стихии: с правильным тетраэдром — Огонь, с кубом — Землю, с правильным октаэдром — Воздух, с правильным додекаэдром — Воду. Он высказал гипотезу о том, что существует еще одна, пятая стихия, связанная с правильным икосаэдром, — Божественный эфир. И хотя эта гипотеза была позднее опровергнута наукой, исследования Платона по-прежнему вызывают интерес как одна из первых попыток математического моделирования в естествознании, а сами правильные многогранники и сегодня называют ***платоновыми телами***.

Совершенные формы правильных многогранников не могли не отобразиться на полотнах знаменитых художников. На рисунке 145 вы видите гравюру М. Эшера «Звезды», среди элементов которой есть правильные многогранники.

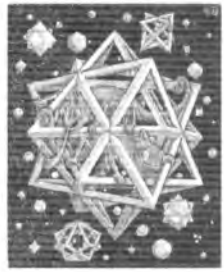


Рис. 145. М. Эшер. Звезды

11.2*. Полуправильные многогранники. Другие виды многогранников

Достаточно жесткие условия определения правильных многогранников существенно ограничивают их число. Поэтому наряду с правильными многогранниками внимание исследователей привлекают также и те, которые удовлетворяют условиям определения правильного многогранника лишь частично. Это, например, ***полуправильные многогранники*** — выпуклые многогранники, гранями которых являются правильные многоугольники нескольких видов, а в каждой вершине сходится одинаковое число ребер.

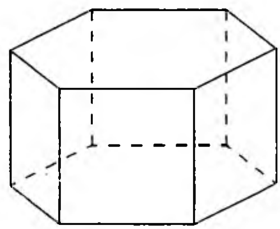


Рис. 146. Правильная призма с равными ребрами

Среди известных вам видов многогранников к полуправильным относятся правильные n-угольные призмы, боковые ребра которых равны ребрам основания (за исключением куба, являющегося правильным многогранником). На рисунке 146 изображена правильная шестиугольная призма, все боковые грани которой — квадраты; такая призма является полуправильным многогранником. К полуправильным многогранникам относятся и так называемые антипризмы, основаниями которых являются равные правильные n-угольники, а боковыми гранями — равносторонние треугольники (рис. 147).

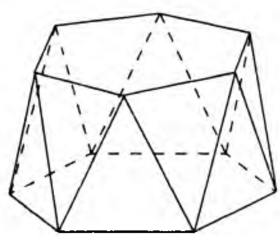
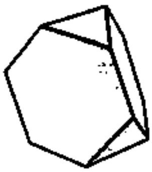
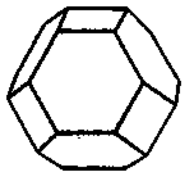


Рис. 147. Антипризма

Кроме этих двух бесконечных серий — призм и антипризм, существует еще 14 видов полуправильных многогранников, 13 из которых открыл и описал Архимед (их называют ***телами Архимеда***), а четырнадцатый был открыт только в XX веке.

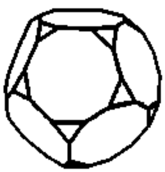
Охарактеризуем тела Архимеда, изображенные на рисунке 148. Самые простые из них можно получить путем «срезания» углов правильных многогранников плоскостями. Например, срезав углы правильного тетраэдра так, чтобы каждая секущая плоскость отсекала третью часть его ребер, выходящих из одной вершины, получим *усеченный тетраэдр* (рис. 148, *а*).


Усеченный тетраэдр
а

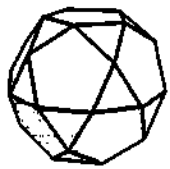

Усеченный октаэдр
б

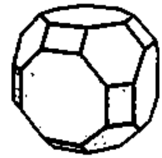

Усеченный икосаэдр
в


Усеченный куб
г

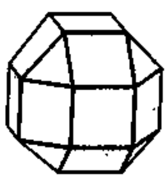

Усеченный додекаэдр
д

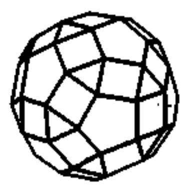

Кубооктаэдр
е

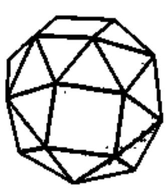

Икосододекаэдр
ж


Усеченный кубооктаэдр
з


Усеченный икосододекаэдр
и


Ромбокубооктаэдр
к


Ромбоикосододекаэдр
л


Плосконосый куб
м

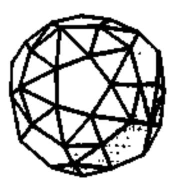

Плосконосый додекаэдр
н

Рис. 148. Тела Архимеда

Аналогичным образом, срезав углы правильных октаэдра и икосаэдра, получим ***усеченный октаэдр*** (рис. 148, *б*) и ***усеченный икосаэдр*** (рис. 148, *в*) — последний многоугольник напомнит многим из вас футбольный мяч. Так же из куба получают ***усеченный куб*** (рис. 148, *г*), а из правильного додекаэдра — ***усеченный додекаэдр*** (рис. 148, *д*).

Если в кубе провести секущие плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины, то в результате отсекания этими плоскостями частей куба получим ***кубооктаэдр*** (рис. 148, *е*). Его название объясняется тем, что он имеет шесть граней-квадратов (как куб) и восемь граней — правильных треугольников (как правильный октаэдр). Если указанным способом отсечь углы правильного додекаэдра, получим ***икосододекаэдр*** (рис. 148, *ж*).

К последним двум многогранникам можно снова применить операцию срезания углов. В результате получим еще два полуправильных многогранника — ***усеченный кубооктаэдр*** (рис. 148, *з*) и ***усеченный икосододекаэдр*** (рис. 148, *и*).

Другие четыре архимедовых тела — это ***ромбокубооктаэдр*** (рис. 148, *к*), ***ромбоикосододекаэдр*** (рис. 148, *л*), ***плосконосый куб*** (рис. 148, *м*) и ***плосконосый додекаэдр*** (рис. 148, *н*)*.

И, наконец, единственный полуправильный многогранник, открытый не Архимедом,— это ***псевдоромбокубооктаэдр*** (рис. 149). Его открыл в 1950 году немецкий математик Й. Миллер, а немного позднее, независимо от него и друг от друга,— советские ученые В. Ашкинузе и Л. Есаулова.

Форму полуправильных многогранников ювелиры часто придают драгоценным камням при огранке (рис. 150).

Среди других видов многогранников большую эстетическую и декоративную ценность представляют ***звездчатые многогранники*** — невыпуклые многогранники, гранями которых являются

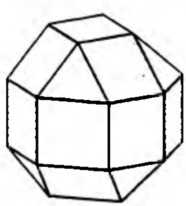


Рис. 149. Псевдоромбокубооктаэдр

Рис. 150. Драгоценные камни в форме многогранников

* Для плосконосого куба и плосконосого додекаэдра приняты также названия: курносый куб и курносый додекаэдр.

правильные многоугольники. Особенно выделяются правильные звездчатые многогранники — так называемые тела Кеплера — Пуансо. Их всего четыре (рис. 151). Такие многогранники можно получить из правильных додекаэдра и икосаэдра продолжением их ребер или граней.

Многочисленные формы звездчатых многогранников созданы самой природой: например, такие формы имеют снежинки (рис. 152). С давних пор ученые занимались исследованием их форм. Сейчас известно несколько тысяч видов снежинок.

Большое значение в химии и кристаллографии имеют другие природные многогранники — ***параллелоэдры***. Это выпуклые многогранники, которыми можно заполнить пространство так, чтобы они не входили друг в друга и не оставляли между собой пустот. Пять типов параллелоэдров открыл в 1881 году один из основателей кристаллографии русский ученый Е. С. Федоров, в честь которого эти многогранники были названы ***телами Федорова*** (рис. 153). А знаменитая теорема теории параллелоэдров носит имя выдающегося украинского математика Георгия Феодосьевича Вороного (1868–1908). Вообще кристаллография как наука многим обязана геометрии, ведь физические свойства кристаллов зависят от структуры их кристаллических решеток, а те, в свою очередь, состоят из многогранников (рис. 154).

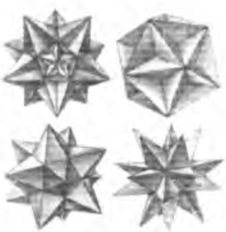


Рис. 151. Правильные звездчатые многогранники

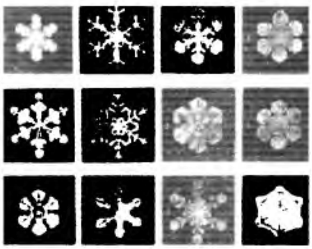


Рис. 152. Снежинки — природные звездчатые многогранники

Рис. 153. Тела Федорова

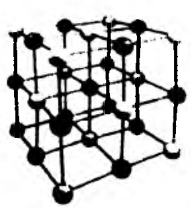


Рис. 154. Кристаллическая решетка графита

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

473° Всегда ли является правильным многогранником:

а) правильная пирамида;

б) правильная призма?

Существует ли правильная пирамида (призма), являющаяся правильным многогранником?

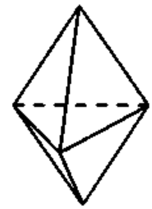


Рис. 155

474.* Объясните отличия между понятиями «тетраэдр», «правильная треугольная пирамида» и «правильный тетраэдр».

475. Два правильных тетраэдра имеют общее основание (рис. 155). Является ли составленный из них многогранник правильным? Ответ обоснуйте.

476. Может ли сечение правильного октаэдра быть девятиугольником? Ответ обоснуйте.

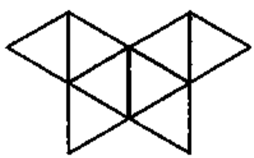
477. Сколько плоскостей симметрии правильного тетраэдра $PABC$ содержат его высоту PO?

478. В одной из вершин правильного многогранника сходятся четыре ребра. Имеет ли данный многогранник вершину, в которой сходятся три ребра? Какой это многогранник?

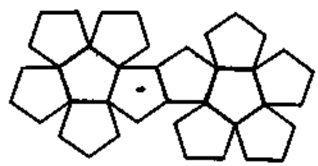
МОДЕЛИРУЕМ

479.* На модели куба покажите, как проходят плоскости его симметрии. Разрезав по двум плоскостям симметрии модель куба, изготовленную из пластилина, выясните, какие многогранники при этом получаются.

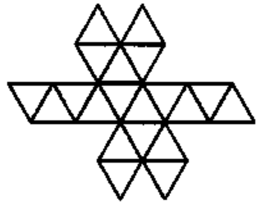
480.* На рисунке 156 даны развертки правильного октаэдра (см. рис. 140), правильного додекаэдра (см. рис. 141) и правильного икосаэдра (см. рис. 142). Перерисуйте их на плотную бумагу в большем масштабе, вырежьте развертки и склейте из них модели этих многогранников.



а



б



в

Рис. 156. Развертки правильных многогранников

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

481. Рассмотрите известные вам правильные многогранники и заполните таблицу:

Вид правильного многогранника	Вид грани	Сумма плоских углов при вершине	Число вершин В	Число граней Г	Число ребер Р	В+Г−Р
Правильный тетраэдр						
Куб						
Правильный октаэдр						
Правильный додекаэдр						
Правильный икосаэдр						

Для каждого правильного многогранника вычислите значение выражения В+Г−Р, где В — число вершин, Г — число граней, Р — число ребер. Какие результаты вы получили?

482. По данному ребру a найдите площадь полной поверхности:

а) правильного тетраэдра;
б) куба;
в) правильного октаэдра;
г) правильного икосаэдра.

→ **483.** Площадь полной поверхности правильного многогранника равна $180\sqrt{3}$ см^2. Найдите площадь его грани, если данный многогранник является:

а) правильным тетраэдром;
б) кубом;
в) правильным додекаэдром;
г) правильным икосаэдром.

484. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что пирамида D_1ACB_1 — правильный тетраэдр.

485. Найдите:

а) площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью B_1AC, если ребро куба равно 2 см;

б) площадь полной поверхности правильного октаэдра, если высота его грани равна m.

→ **486.** Найдите:

а) площадь полной поверхности правильного тетраэдра с высотой 6 см;

б) площадь поверхности куба с диагональю d.

487. Докажите, что отрезки, соединяющие центры граней правильного тетраэдра, равны.

→ **488.** Докажите, что правильный октаэдр имеет шесть пар параллельных ребер.

Уровень Б

489. Найдите двугранные углы:

а) правильного тетраэдра; б) правильного октаэдра.

490. Докажите, что сечение правильного октаэдра, проведенное через четыре его вершины, — квадрат.

491. Ребро правильного октаэдра равно 4 см. Найдите площадь сечения октаэдра плоскостью его симметрии. Сколько решений имеет задача?

→ **492.** Найдите площадь сечения правильного тетраэдра с ребром a плоскостью его симметрии.

493. Площади поверхностей правильного тетраэдра и правильного октаэдра равны. Докажите, что ребро тетраэдра равно диагонали октаэдра.

→ **494.** Точка M — середина высоты PO правильного тетраэдра $PABC$. Докажите, что плоские углы при вершине M правильной пирамиды $MABC$ прямые.

Уровень В

495. Докажите, что:

а) центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра;

б) центры граней правильного октаэдра являются вершинами куба.

496. Докажите, что середины ребер правильного тетраэдра являются вершинами правильного октаэдра.

→ **497.** Докажите, что центры граней правильного тетраэдра являются вершинами другого правильного тетраэдра. Найдите отношение площадей поверхностей этих тетраэдров.

498. Постройте сечение правильного тетраэдра плоскостью, которая перпендикулярна отрезку, соединяющему середины двух скрещивающихся ребер, и проходит через середину этого отрезка. Определите вид сечения.

→ **499.** Докажите, что противолежащие грани правильного октаэдра параллельны. Найдите расстояние между плоскостями этих граней, если ребро правильного октаэдра равно a.

Повторение перед изучением § 12

Теоретический материал

- окружность и круг (7 класс)
- длина окружности и площадь круга (9 класс)

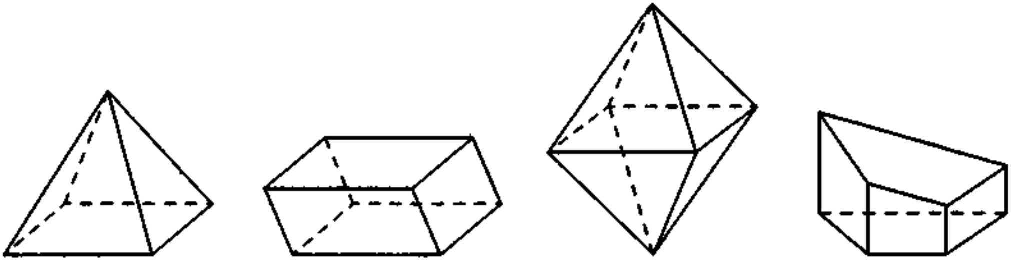
Задачи

500. Найдите площадь круга, в котором хорда длиной $12\sqrt{3}$ см стягивает дугу в 120°.

501. Из точки окружности проведены две хорды, угол между которыми равен 30°. Найдите отношение длин этих хорд, если одна из них проходит через центр окружности.

Тестовое задание для самопроверки № 2

1. Среди данных фигур выберите четырехугольную призму.



а б в г

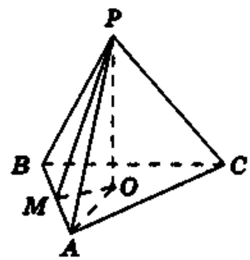
2. Отрезок PO — высота правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$. Какие из данных отрезков пересекаются в точке O?

а) PA и PB;
б) AB и CD;
в) AC и BD;
г) PA и BD.

3. Среди данных геометрических тел выберите то, которое не является правильным многогранником.

а) куб;
б) правильный октаэдр;
в) правильный икосаэдр;
г) правильная четырехугольная пирамида.

4. Отрезок PM — апофема правильной треугольной пирамиды $PABC$ с высотой PO (см. рисунок). Назовите линейный угол двугранного угла при ребре AB основания пирамиды.



а) PMO;
б) PAO;
в) PAM;
г) POM.

5. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Среди данных утверждений выберите неверное.

а) BB_1C_1C — прямоугольник;
б) треугольник ABC равносторонний;
в) AA_1B_1C — параллелограмм;
г) AA_1BC — пространственный четырехугольник.

6. Среди данных многоугольников выберите тот, который не может быть сечением пятиугольной призмы.

а) треугольник;
б) четырехугольник;
в) пятиугольник;
г) восьмиугольник.

7. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а боковое ребро 5 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

а) 80 см^2;
б) 84 см^2;
в) 96 см^2;
г) 48 см^2.

8. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 17 см. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если стороны его основания равны 8 см и 9 см.

а) 289 см^2;
б) 204 см^2;
в) 408 см^2;
г) 216 см^2.

9. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна l. Найдите площадь сечения призмы плоскостью AB_1C, если плоскость сечения образует с плоскостью основания угол α.

а) $\dfrac{\sqrt{3}l^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$;

б) $\dfrac{\sqrt{3}l^2\cos\alpha}{3\sin^2\alpha}$;

в) $\dfrac{\sqrt{3}l^2\cos\alpha}{3}$;

г) $\dfrac{\sqrt{3}l^2}{3\cos\alpha}$.

10. Основание треугольной пирамиды — прямоугольный треугольник, а основание высоты пирамиды — середина гипотенузы этого треугольника. Среди данных утверждений выберите неверное.

а) все боковые ребра пирамиды равны;

б) все боковые ребра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания пирамиды;

в) все боковые ребра пирамиды образуют равные углы с высотой пирамиды;

г) все высоты боковых граней пирамиды равны.

11. В треугольной пирамиде $PABC$ с высотой PO боковая грань PAC перпендикулярна плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом α. Среди данных утверждений выберите верное.

а) точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC;

б) $\angle PAO = \angle PCO = \alpha$;

в) $\angle PBO = \alpha$;

г) $BA : BC = OA : OC$.

12. Расстояние между серединами двух скрещивающихся ребер правильного тетраэдра равно a. Найдите площадь полной поверхности этого тетраэдра.

а) $2\sqrt{3}a^2$;

б) $3\sqrt{3}a^2$;

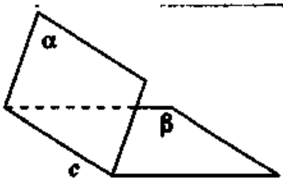
в) $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$;

г) $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

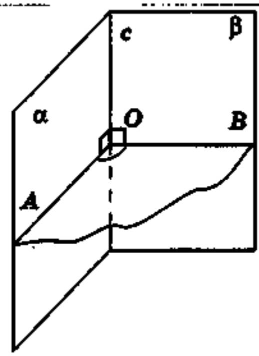
Итоги главы II

Итоговый обзор главы II

Двугранные и многогранные углы



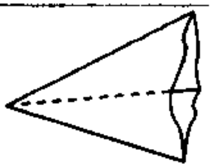
Двугранным углом называется фигура, состоящая из двух полуплоскостей (***граней двугранного угла***) с общей граничной прямой (***ребром двугранного угла***)



Угол AOB — ***линейный угол*** двугранного угла

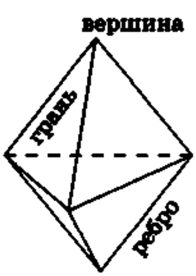
Все линейные углы двугранного угла равны

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла



Трехгранным углом называется фигура, состоящая из трех плоских углов с общей вершиной и попарно общими сторонами, не лежащими в одной плоскости

Многогранники

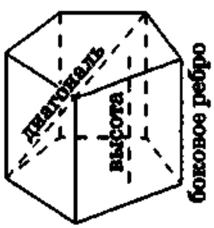


Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников

Плоские многоугольники, из которых состоит поверхность многогранника, называются ***гранями многогранника***. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно ***ребрами*** и ***вершинами многогранника***

Выпуклым многогранником называется многогранник, все точки которого лежат по одну сторону от плоскости каждой его грани или в самой этой плоскости

Призмы



Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников

Многоугольники называют ***основаниями призмы***. Все грани призмы, не являющиеся основаниями, называют ***боковыми гранями призмы***

- Основания призмы параллельны и равны
- Боковые грани призмы — параллелограммы

Боковыми ребрами призмы называются отрезки, соединяющие соответствующие вершины оснований

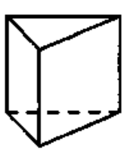
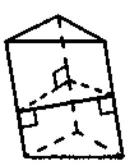
- Боковые ребра призмы параллельны и равны

Высотой призмы называется перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания

Диагональю призмы называется отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани

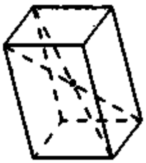
Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а ***площадью боковой поверхности*** — сумма площадей ее боковых граней

Виды призм

	***Прямой призмой*** называется призма, боковые ребра которой перпендикулярны плоскостям оснований Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту: $S_{бок} = P_{осн} \cdot H$
	***Наклонной призмой*** называется призма, которая не является прямой Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро: $S_{бок} = P_{\perp} \cdot l$

Окончание таблицы

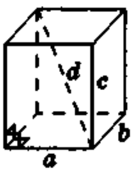
Правильной призмой называется прямая призма, основания которой — правильные многоугольники



Параллелепипедом называется призма, основание которой — параллелограмм

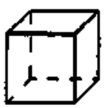
- Противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны
- Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам
- Точка пересечения диагоналей параллелепипеда — центр его симметрии

Прямым параллелепипедом называется прямая призма, основанием которой является параллелограмм



Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник

Пространственная теорема Пифагора. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$



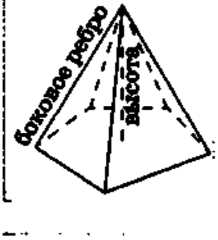
Кубом называется прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны

Пирамиды

Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (***основания пирамиды***), точки, не лежащей в плоскости основания (***вершины пирамиды***), и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания

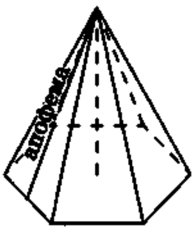
Тетраэдром называют треугольную пирамиду

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости ее основания



Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней, а ***площадью полной поверхности*** — сумма площадей основания и боковой поверхности: $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$

Виды пирамид



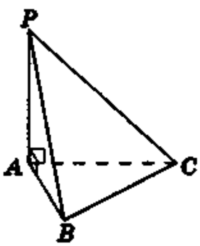
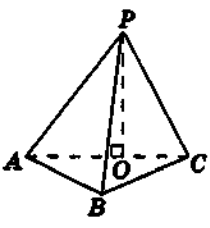
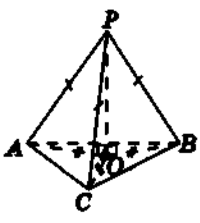
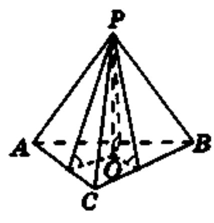
Правильной пирамидой **называется пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а основание высоты пирамиды совпадает с центром этого многоугольника**

Апофемой правильной пирамиды **называется высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды**

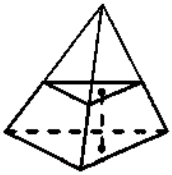
- **Все боковые ребра правильной пирамиды равны**
- **Все боковые ребра правильной пирамиды равнонаклонены к плоскости основания**
- **Все боковые ребра правильной пирамиды образуют равные углы с высотой пирамиды**
- **Все боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники**
- **Все двугранные углы при основании правильной пирамиды равны**

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра ее основания на апофему:

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l$$

Две боковые грани перпендикулярны основанию	Одна боковая грань перпендикулярна основанию	Боковые ребра равны	Двугранные углы при основании равны
			
PA — высота пирамиды	PO — высота пирамиды	PO — высота пирамиды, O — центр окружности, описанной около основания	PO — высота пирамиды, O — центр окружности, вписанной в основание

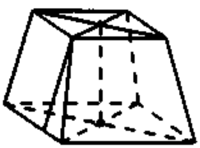
Усеченная пирамида



Плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды и пересекающая ее боковые ребра, отсекает пирамиду, подобную данной, и многогранник, который называют ***усеченной пирамидой***

Основаниями усеченной пирамиды являются основание данной пирамиды и подобный ему многоугольник, полученный в сечении

Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания



Если секущая плоскость правильной пирамиды параллельна основанию, то в результате пересечения получается ***правильная усеченная пирамида***

Апофемой правильной усеченной пирамиды называется высота боковой грани

- Основания — правильные многоугольники
- Отрезок, соединяющий центры оснований,— высота
- Боковые грани — равные равнобедренные трапеции

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему: $S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$

Правильные многогранники

Правильный тетраэдр	Куб (правильный гексаэдр)	Правильный октаэдр
		

Правильный додекаэдр	Правильный икосаэдр
	

Контрольные вопросы к главе II

1. Дайте определение двугранного угла. Изобразите двугранный угол и обоснуйте его линейный угол.

2. Нарисуйте трехгранный угол, опишите его элементы и связи между ними.

3. Дайте определение многогранника.

4. Дайте определение призмы. Изобразите призму и опишите ее элементы.

5. Дайте определение прямой призмы. Как вычислить площадь ее боковой поверхности?

6. Дайте определение правильной призмы. Опишите ее свойства.

7. Сформулируйте и докажите теорему о площади боковой поверхности наклонной призмы.

8. Дайте определение параллелепипеда. Какой параллелепипед называется прямым; прямоугольным? Как вычислить длину диагонали прямоугольного параллелепипеда по его измерениям?

9. Дайте определение пирамиды. Изобразите пирамиду и опишите ее элементы.

10. Какая пирамида называется правильной? Как вычислить площадь боковой поверхности правильной пирамиды?

11. Как отражаются свойства боковых ребер и граней пирамиды на расположении ее высоты? Сформулируйте и докажите соответствующие утверждения.

12. Дайте определение сечения геометрического тела. Изобразите сечение куба плоскостью, пересекающей все его боковые ребра.

13. Какую форму имеет сечение пирамиды, параллельное плоскости основания? Дайте определение усеченной пирамиды. Изобразите усеченную пирамиду и опишите ее элементы.

14. Назовите пять видов правильных многогранников. Какие элементы симметрии имеют правильный тетраэдр и куб?

Дополнительные задачи к главе II

502. Докажите, что диагональное сечение правильной пятиугольной призмы параллельно одной из боковых граней.

503. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали B_1D и BD_1 перпендикулярны. Найдите угол между диагоналями A_1C и B_1D.

504. Высота правильной шестиугольной призмы равна 4 см, а диагонали двух соседних боковых граней, проведенные из одной вершины, взаимно перпендикулярны. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

505. Основание прямой призмы — трапеция с основаниями 3 см и 10 см, а три боковые грани призмы — квадраты. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

506. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 17 см и 31 см, а его диагонали образуют с плоскостью основания углы 45° и 60°. Найдите высоту параллелепипеда.

507. Площадь основания правильной треугольной призмы равна S, а площадь сечения, проведенного через сторону одного основания и противолежащую вершину другого основания, равна Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

508. Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды вдвое больше площади основания. Докажите, что сторона основания пирамиды вдвое больше ее высоты.

509. Какую наибольшую площадь полной поверхности может иметь треугольная пирамида, пять ребер которой равны a?

510. Основание пирамиды — квадрат со стороной a. Одна боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а две соседние с ней боковые грани образуют с основанием острые углы α и β. Найдите высоту пирамиды.

511. Основание пирамиды — ромб со стороной a и углом 60°. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 60°. Найдите высоту пирамиды.

512. Основание пирамиды — треугольник со стороной c и прилежащими к ней углами α и β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если все двугранные углы при основании равны 60°.

513. Основание пирамиды — прямоугольник с углом между диагоналями γ. Все боковые ребра пирамиды равны l и наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите площадь основания пирамиды.

514. Отрезок длиной 27 см, соединяющий центры оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды, делит ее диагональ на части длиной 20 см и 25 см. Найдите площади оснований пирамиды.

515. Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите площадь поверхности куба, вершинами которого являются центры граней данного октаэдра.

516 (опорная). ***Если основание высоты пирамиды является центром окружности, вписанной в ее основание, то в данной пирамиде:***

1) ***все двугранные углы при основании равны;***
2) ***все высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны;***
3) ***все высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, образуют равные углы с высотой пирамиды;***
4) ***высота пирамиды образует равные углы с плоскостями всех боковых граней.***

Докажите.

Задачи повышенной сложности

517. Докажите, что существует трехгранный угол, все плоские углы которого равны 60°.

518 (опорная). ***Дан трехгранный угол с плоскими углами*** α, β, γ ***и противолежащими им двугранными углами*** A, B, C ***соответственно. Тогда существует полярный трехгранний угол с плоскими углами*** $180°-A$, $180°-B$, $180°-C$ ***и двугранными углами*** $180°-\alpha$, $180°-\beta$, $180°-\gamma$. Докажите.

519 (опорная). ***Дан трехгранный угол с плоскими углами*** α, β, γ ***и противолежащими им двугранными углами*** A, B, C ***соответственно. Тогда:***

а) $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C$ (***первая теорема косинусов для трехгранного угла***);

б) $\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos\gamma$ (***вторая теорема косинусов для трехгранного угла***);

в) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin A}=\dfrac{\sin\beta}{\sin B}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$ (***теорема синусов для трехгранного угла***).

Докажите.

520. Каждое ребро правильной шестиугольной призмы равно a. Найдите площадь сечения, проведенного через середины двух параллельных сторон основания под углом 45° к плоскости основания. Изменится ли ответ, если боковое ребро пирамиды равно b ($b>a$)?

521. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 9 см, 12 см и 15 см. Вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 5 см. Найдите площадь сечения, которое проходит через высоту и наибольшее боковое ребро пирамиды.

522. Площадь боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна S. Найдите площадь сечения, проведенного через середину высоты пирамиды параллельно ее боковой грани.

523. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки P, Q, R на ребрах AA_1, A_1D_1, A_1B_1 соответственно. Точки M, N, K лежат внутри многоугольников PQR, $B_1C_1D_1QR$, CC_1D_1D соответственно. Постройте сечение многогранника $ABCDPQD_1C_1B_1R$ (куба со «спилом») плоскостью MNK.

524. Тетраэдр называется *ортоцентрическим*, если все его четыре высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Докажите свойства, связанные с ортоцентрическим тетраэдром.

а) Дан тетраэдр $PABC$, в котором $AP \perp BC$. Тогда высоты, проведенные из вершин B и C (а также высоты, проведенные из вершин A и P), пересекаются в одной точке, причем эта точка лежит на общем перпендикуляре к AP и BC.

б) Дан тетраэдр $PABC$, в котором высоты, проведенные из вершин B и C, пересекаются в одной точке. Тогда $AP \perp BC$.

в) Тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда две пары его противолежащих ребер перпендикулярны (в этом случае третья пара противолежащих ребер также перпендикулярна).

г) Тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противолежащих ребер равны.

525. Тетраэдр называется *равногранным*, если все его грани являются равными треугольниками. Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) суммы плоских углов при любых трех вершинах тетраэдра равны 180°;

б) суммы плоских углов при любых двух вершинах тетраэдра равны 180° и, кроме того, равны какие-нибудь два противолежащих ребра;

в) сумма плоских углов при любой вершине равна 180° и, кроме того, в тетраэдре есть две пары равных противолежащих ребер.

526. Тетраэдр называется *прямоугольным*, если три плоских угла при одной вершине прямые. Докажите следующие утверждения:

а) каждый прямоугольный тетраэдр является ортоцентрическим;

б) длины отрезков, соединяющих середины противолежащих ребер прямоугольного тетраэдра, равны;

в) сумма квадратов трех площадей граней прямоугольного тетраэдра равна квадрату площади четвертой грани.

527. Дан правильный тетраэдр $PABC$. Точки K, M и N — середины ребер CP, AP и AB соответственно, а точка O — центр треугольника ABC. Найдите угол между прямыми MO и KN.

528. Каждое ребро призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно 2. Точки M и N — середины ребер AB и A_1C_1 соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой CN, если известно, что $\angle A_1AC = 60°$, а прямые A_1A и AB перпендикулярны.

Историческая справка

Многогранники как наиболее распространенные геометрические тела интересовали ученых издавна. В разные эпохи математики предлагали собственные определения призмы и пирамиды. В результате возникло несколько подходов к определению многогранника — в частности, многогранник рассматривают либо как поверхность, либо как тело, ограниченное поверхностью. Каждый из этих подходов корректен с научной точки зрения и имеет своих сторонников.

Учение о правильных многогранниках изложено в последней книге знаменитых «Начал» Евклида, но некоторые историки приписывали первенство в исследовании правильных многогранников Пифагору. Между тем, почти все известные древнегреческие геометры так или иначе затрагивали в своих работах свойства правильных многогранников. В Средние века большой интерес к этой теме проявили художники и архитекторы.

Выдающийся немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571–1630) на основании теории правильных многогранников построил модель Солнечной системы (так называемый «кубок Кеплера»). Правда, в дальнейших исследованиях астрономов гипотезы Кеплера не нашли подтверждения. Но идея использования многогранников для моделирования природных явлений дала толчок многим исследованиям в разных областях науки.

Иоганн Кеплер

Памятник Кеплеру в Вайль-дер-Штадте

Кратер Кеплера на Луне

Кубок Кеплера (модель Солнечной системы)

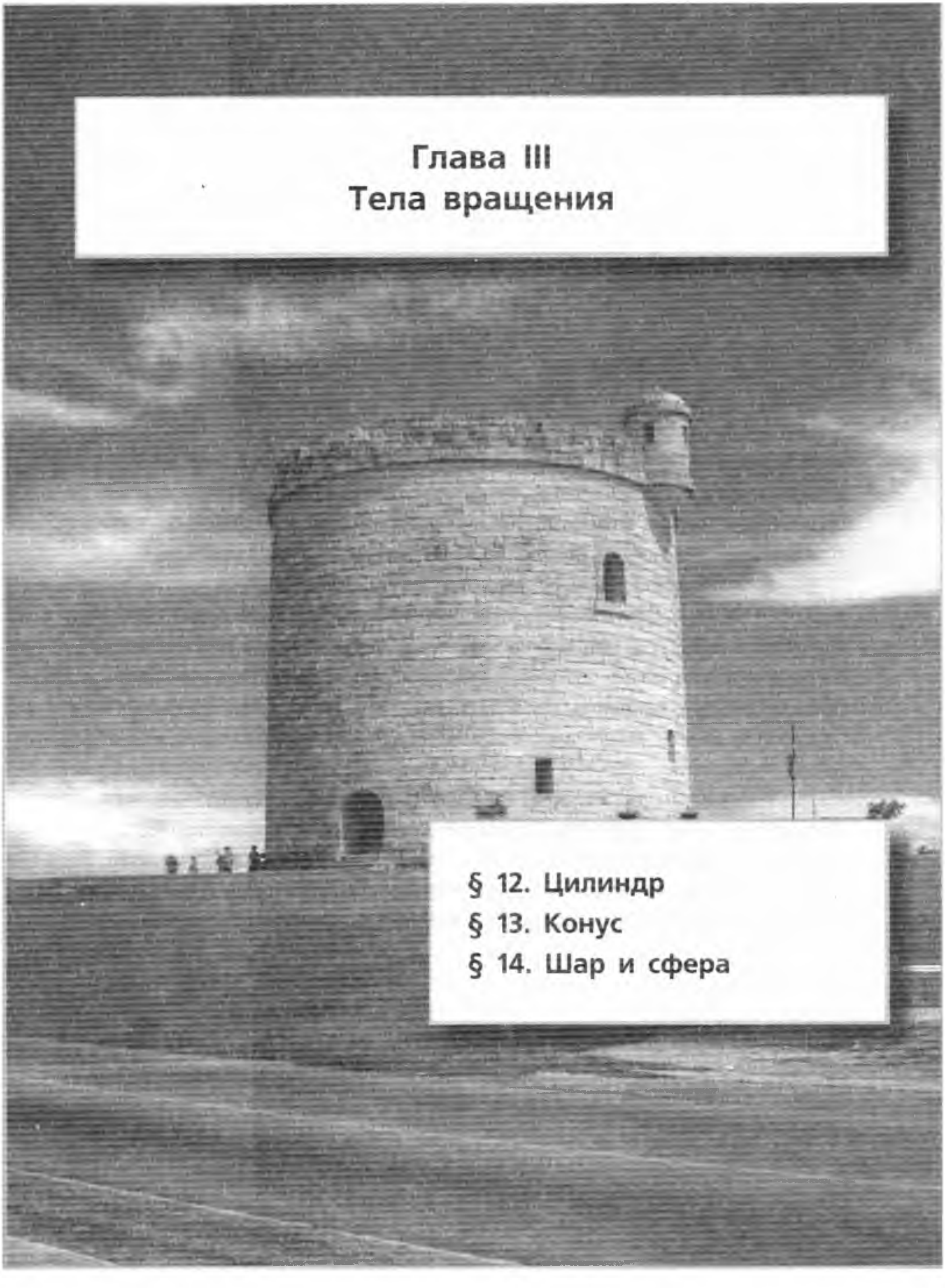
Тематика сообщений и рефератов к главе II

1. Геометрические свойства трехгранных углов.
2. Геометрия тетраэдра.
3. Звездчатые многогранники. Тела Кеплера — Пуансо.
4. Моделирование правильных и полуправильных многогранников.
5. Многогранники в изобразительном искусстве.
6. Геометрические элементы в деревянной архитектуре Украины.
7. Георгий Вороной — выдающийся украинский геометр.
8. Биография И. Кеплера.
9. Теорема Эйлера В + Г − Р = 2 и ее применение.

Рекомендованные источники информации

1. Глейзер Г. И. История математики в школе. IX–X кл. — М.: Просвещение, 1982.
2. Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.
3. Бевз Г. П. Геометрія трикутника і тетраедра.— К.: Вежа, 2009.
4. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. Т. 1. Стереометрия, преобразования пространства. — М.: МЦНМО, 2006.
5. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 3 т. Т. 3. Треугольники и тетраэдры. — М.: МЦНМО, 2009.
6. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Правильные, полуправильные и звездчатые многогранники.— М.: МЦНМО, 2010.
7. Тадеєв В. О. Геометрія. Основи стереометрії. Многогранники: Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. В. І. Михайловського.— Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2003.
8. Шаскольская М. П. Кристаллы. — М.: Наука, 1985.
9. Сайт «Многогранники». *http://geometry.elabugae.ru/*
10. Сайт «Модели многогранников». *http://polygran.boom.ru/*
11. М. Веннинджер. Модели многогранников. *http://www.wenninger.narod.ru/*
12. Дерев'яні храми України. *http://www.derev.org.ua/*
13. Иоганн Кеплер. *http://space.rin.ru/*

Глава III
Тела вращения



§ 12. Цилиндр
§ 13. Конус
§ 14. Шар и сфера

Глубокое изучение природы является дающим жизнь источником математических открытий.

Жан Батист Фурье,
французский математик

Многочисленные геометрические объекты и даже направления геометрических исследований ученым подсказывает сама природа. Так, множество созданных ею предметов имеют форму тел вращения.

В этой главе мы рассмотрим три классических тела вращения — цилиндр, конус и шар. Все они являются лишь абстрактными моделями реальных предметов, окружающих нас в повседневной жизни, но общие исследовательские подходы к их изучению и полученные результаты могут быть использованы в архитектуре, искусстве, технике.

Изучение тел вращения опирается на известные из курса планиметрии свойства окружностей и многоугольников. В процессе усвоения нового материала вам помогут также модели рассматриваемых тел, которые вы можете изготовить своими руками.

§ 12. ЦИЛИНДР

12.1. Поверхности и тела вращения

При вращении вокруг оси l на угол 360° произвольная точка M, не принадлежащая прямой l, описывает окружность (рис. 157, *а*). Центр этой окружности O лежит на прямой l, а сама окружность — в плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой l.

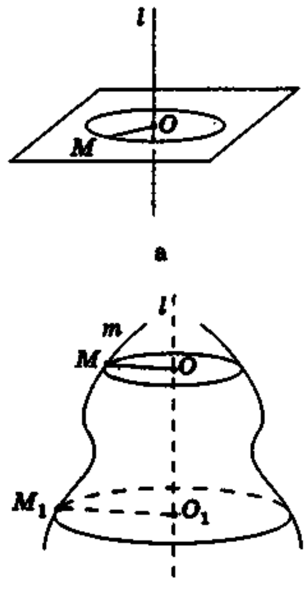


Рис. 157. Линии, поверхности и тела вращения

Рассмотрим теперь линию m, которая лежит в одной плоскости с прямой l и не пересекает ее. При вращении вокруг прямой l каждая точка линии m описывает окружность с центром на этой прямой. Линия m при таком вращении описывает некоторую поверхность (рис. 157, *б*). Эту поверхность называют ***поверхностью вращения***.

Вернемся к рисунку 157, *а* и рассмотрим вращение вокруг прямой l отрезка OM, один из концов которого принадлежит этой прямой. При таком вращении получается круг с центром O и радиусом OM. Тогда при вращении вокруг прямой l плоской фигуры OMM_1O_1 (на рисунке 157, *б* она закрашена) получается геометрическое тело, которое называют ***телом вращения***. Прямую l в этом случае называют ***осью тела вращения***, а совокупность точек окружностей, описывающих точки линии MM_1, — ***поверхностью тела вращения***.

Очевидно, что любое сечение тела вращения плоскостью, перпендикулярной его оси, является кругом. Рассмотрим сечение тела вращения плоскостью, проходящей через его ось. Такое сечение называется ***осевым***. На рисунке 158 шестиугольник $ABCDEF$ — осевое сечение тела вращения. Данное тело получено вращением плоского пятиугольника $ABCKM$ вокруг прямой, содержащей сторону* KM.

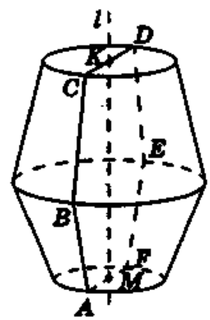
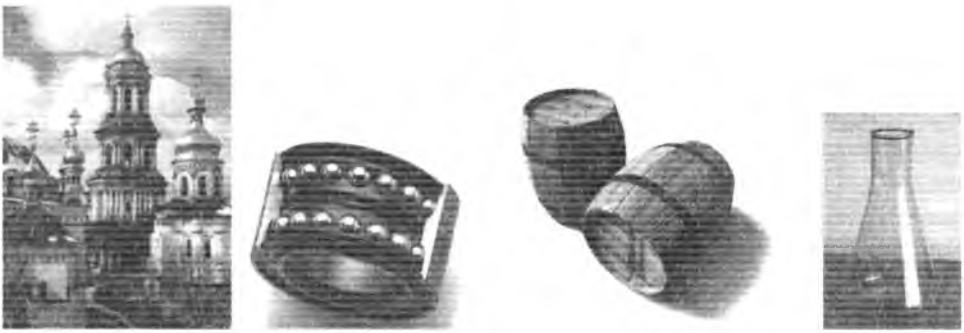


Рис. 158. Осевое сечение тела вращения

* Далее вместо слов «плоский многоугольник вращается вокруг прямой, содержащей его сторону», мы будем говорить «многоугольник вращается вокруг стороны».

Форму тел вращения имеют элементы архитектурных сооружений, многие технические детали, различные виды посуды и т. д. (рис. 159). Заметим, что дать определение любого тела вращения можно двумя способами — через описание самого тела или через описание способа его получения вращением плоской фигуры вокруг оси (о видах определений речь пойдет в п.12.3). В дальнейшем мы будем придерживаться более традиционного, первого, способа определения, но также указывать, как получить данную фигуру вращением.



а б в г

Рис. 159. Предметы, имеющие форму тел вращения

12.2. Цилиндр. Сечения цилиндра

Определение

Цилиндром (точнее, **круговым цилиндром**) называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.

Цилиндр — от греческого «килиндро» — вращаю.

Круги называются ***основаниями цилиндра***, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей, ограничивающих основания,— ***образующими цилиндра***.

Цилиндр называется ***прямым***, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. Так как в школьном курсе мы будем рассматривать только прямые круговые цилиндры, в дальнейшем договоримся называть их просто цилиндрами.

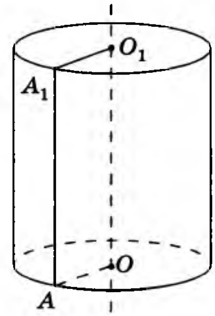


Рис. 160. Цилиндр

Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

Высотой цилиндра называется перпендикуляр, проведенный из точки одного основания цилиндра к плоскости другого основания. Очевидно, что высота цилиндра равна его образующей.

На рисунке 160 изображен цилиндр с центрами оснований O и O_1. Отрезок AA_1 — образующая этого цилиндра, а отрезки OA и O_1A_1 — его радиусы.

Рассмотрим некоторые свойства цилиндра.

Так как параллельный перенос является движением, то ***основания цилиндра — равные круги, лежащие в параллельных плоскостях.***

Из свойств параллельного переноса следует и то, что ***образующие цилиндра параллельны и равны.***

Цилиндр является телом вращения, которое получается вращением прямоугольника вокруг его стороны. Например, на рисунке 160 изображен цилиндр, полученный вращением прямоугольника OAA_1O_1 вокруг стороны OO_1. Таким образом, ***прямая, проходящая через центры оснований, является осью цилиндра.*** Заметим также, что ***отрезок, соединяющий центры оснований цилиндра, равен образующей***, а значит, и высоте цилиндра.

Цилиндрические формы часто встречаются в архитектуре, технике, спорте и в быту (рис. 161).

а б в г

Рис. 161. Цилиндрические формы

Рассмотрим некоторые виды сечений цилиндра. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной плоскости основания, представляет собой круг, равный основанию. Действительно, параллельный перенос на вектор $\overline{O_2O}$ переводит плоскость сечения α в плоскость основания, а само сечение — в основание цилиндра. В частности, плоскость, параллельная плоскости основания и проходящая через

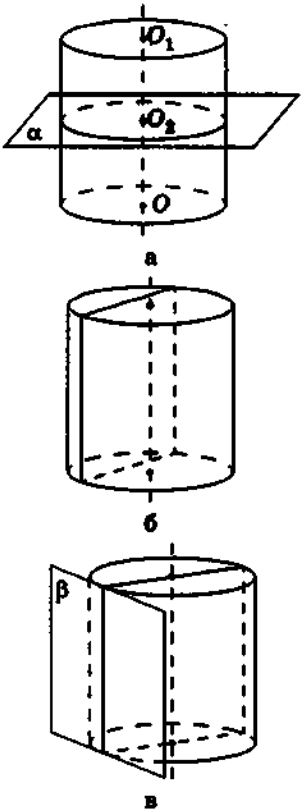


Рис. 162. Сечения цилиндра

середину высоты цилиндра, является плоскостью его симметрии (рис. 162, *а*).

Так как образующие цилиндра параллельны друг другу и его оси, равны и перпендикулярны основаниям, то ***сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, является прямоугольником*** (рис. 162, *б*). Две стороны этого прямоугольника — образующие цилиндра, а две другие — параллельные хорды его оснований. Осевое сечение цилиндра также является прямоугольником (рис. 162, *в*), две стороны которого — образующие цилиндра, а две другие — параллельные диаметры его оснований.

В случае, когда высота цилиндра равна диаметру его основания, осевое сечение цилиндра является квадратом, а сам цилиндр называется ***равносторонним***.

Плоскость осевого сечения является плоскостью симметрии цилиндра (обоснуйте этот факт самостоятельно).

✸ Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, содержащему эту образующую, называется ***касательной плоскостью к цилиндру***. Плоскость β на рисунке 162, *в* является касательной к цилиндру.

Задача

Радиус цилиндра равен 5 см. Площадь сечения, параллельного оси цилиндра и удаленного от нее на 4 см, равна 42 см^2. Найдите высоту цилиндра.

Решение

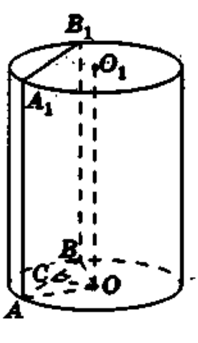


Рис. 163

Пусть дан цилиндр с осью OO_1 (рис. 163), AA_1B_1B — сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси, $S_{AA_1B_1B}=42$ см^2. Так как $A_1A\perp(AOB)$ как образующая цилиндра, то по признаку перпендикулярности плоскостей плоскость данного сечения перпендикулярна плоскости основания. Кроме того, так как сечение цилиндра, параллельное оси, представляет собой прямоугольник, то $AA_1 = \frac{42}{AB}$.

Проведем в плоскости AOB перпендикуляр OC к прямой AB. Тогда $OC \perp (A_1AB)$ как перпендикуляр к прямой пересечения двух перпендикулярных плоскостей. Следовательно, отрезок OC — расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения; по условию задачи $OC = 4$ см. Найдем высоту цилиндра.

Проведем радиусы цилиндра OA и OB. Отрезок OC — медиана и высота равнобедренного треугольника AOB. Таким образом, из треугольника AOC ($\angle C = 90°$, $OA = 5$ см, $OC = 4$ см) по теореме Пифагора $AC = 3$ см. Тогда $AB = 2AC$, $AB = 6$ см.

Следовательно, $AA_1 = \frac{42}{6} = 7$ (см).

Ответ: 7 см.

12.3*. Виды определений

Как мы уже отмечали, в геометрии существуют разные подходы к определению основных фигур. Разные способы определения понятий используются и в других науках. Опишем наиболее распространенные виды определений.

Определение как логическая операция должно решать две задачи — выделять определяемый предмет и отличать его от всех других. Поэтому большинство научных определений — это определения, данные через ближайший род и видовое отличие (в логике такие определения называют *классическими*). Поясним особенности классического определения на примере известного вам определения куба: «Кубом называется прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны». В этом определении сначала выделяется ближайший род многогранников, к которому относится куб, — прямоугольные параллелепипеды, а затем описывается отличие куба от остальных прямоугольных параллелепипедов, — равенство всех ребер.

К классическим относится и большинство определений в естественных и гуманитарных науках. Например, в филологии архаизмом называется устарелое слово, вышедшее из общего употребления. Для этого определения архаизма используется ближайший род («слово») и видовое отличие, заключающееся в устарелости данного слова.

Разновидностью классических являются так называемые *генетические* определения, в которых видовое отличие описывает способ образования определяемого предмета. Например, вместо определения цилиндра, приведенного в п. 12.2, можно было бы дать равносильное генетическое определение: «Цилиндром называется тело, которое получается при вращении прямоугольника вокруг его стороны».

Кроме определений, явно указывающих на тождество двух понятий — определяемого и того, которое определяет, существуют и другие, неявные определения. Вспомним, например, определение пирамиды: «Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания пирамиды), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания». В контексте этого определения мы описали, кроме пирамиды, еще два понятия — основание пирамиды и вершина пирамиды, иначе говоря, дали *контекстуальное* определение этих двух понятий.

Другим видом неявных определений являются определения путем показа. Представим, например, что нам нужно объяснить собеседнику, какой цвет называется «индиго». Конечно, наиболее действенный способ объяснения — показать предмет или изображение определяемого цвета. Определения путем показа в логике называют *остенсивными*. Так, в курсе геометрии мы использовали остенсивные определения для отдельных видов полуправильных и звездчатых многогранников (п. 11.2).

В науке, учебе, повседневной жизни в зависимости от конкретной ситуации целесообразными могут оказаться разные виды определений. Но главная цель, с которой они используются, всегда остается неизменной — определения должны способствовать процессу общения между людьми, помогать им лучше понимать друг друга. Недаром знаменитый древнегреческий философ Сократ говорил, что благодаря правильным определениям он продолжает дело своей матери-акушерки, помогая рождению истины в споре.

Вопросы и задачи

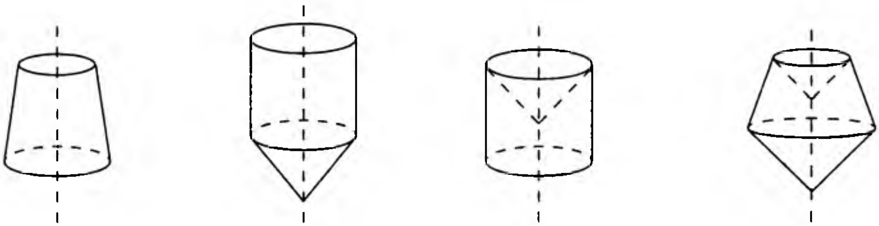
ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

Какие из предметов, изображенных на рисунке 164, имеют форму тел вращения?

а б в г

Рис. 164

530* **Какое из тел, изображенных на рисунке 165, *а–г*, получается при вращении прямоугольной трапеции вокруг меньшей боковой стороны; вокруг меньшего основания?**



а б в г

Рис. 165

531* **Имеет ли цилиндр центр симметрии; ось симметрии? Сколько плоскостей симметрии имеет цилиндр? Существуют ли плоскости симметрии цилиндра, не содержащие его ось?**

532. **Два сечения цилиндра, параллельные его оси, имеют площади S_1 и S_2, причем $S_1 < S_2$. Какое из данных сечений находится ближе к оси цилиндра? Какое из сечений цилиндра, перпендикулярных плоскости основания, имеет наибольшую площадь?**

МОДЕЛИРУЕМ

533* **Заполните водой до половины стакан цилиндрической формы и немного наклоните его. Изобразите линию, по которой поверхность воды касается стенок стакана. Является ли эта линия окружностью?**

534* **Разрежьте конфету цилиндрической формы так, чтобы плоскость сечения не была перпендикулярна оси цилиндра. Является ли полученное сечение кругом?**

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

535.* Найдите площадь осевого сечения цилиндра с радиусом 2 см и высотой 3 см.

536.* Радиус цилиндра равен R, высота H, а площадь осевого сечения равна S. Найдите:

а) S, если $R=4$ м, $H=3$ м;

б) H, если $S=36$ см^2, $R=2$ см;

в) R, если $S=24$ см^2, $H=4$ см.

537. Прямоугольник со сторонами 8 см и 3 см вращается вокруг стороны. Найдите диагональ осевого сечения полученного цилиндра. Сколько решений имеет задача?

538. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите радиус и высоту цилиндра.

539. Осевое сечение цилиндра — квадрат с диагональю $8\sqrt{2}$ см. Найдите площадь сечения, параллельного оси цилиндра, если диагональ этого сечения равна 10 см.

540. Площадь осевого сечения равностороннего цилиндра равна 64 см^2. Найдите площадь основания цилиндра.

541. Радиус цилиндра равен 10 см, а высота 9 см. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, диагональ которого равна 15 см. Найдите расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.

542. Диагональ сечения цилиндра, параллельного оси, наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь сечения, если радиус цилиндра равен 6 см, а хорда, по которой плоскость сечения пересекает основание, стягивает дугу в 60°.

543. Высота цилиндра равна 24 см. Сечение цилиндра, параллельное оси и удаленное от нее на 5 см, имеет форму квадрата. Найдите площадь основания цилиндра.

Уровень Б

544. Найдите площадь осевого сечения тела, полученного вращением:

а) равнобедренного треугольника с основанием a и углом 120° вокруг боковой стороны;

б) правильного шестиугольника со стороной 4 см вокруг стороны.

Сделайте соответствующие рисунки.

→ **545.** Найдите площадь осевого сечения тела, полученного вращением:

а) параллелограмма со сторонами 7 см и 15 см и диагональю 20 см вокруг наибольшей стороны;

б) ромба со стороной a и углом 45° вокруг стороны.

Сделайте соответствующие рисунки.

546. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите:

а) высоту и радиус цилиндра, если площадь сечения равна S;

б) площадь осевого сечения, если хорда основания, стягивающая дугу в 60°, равна m.

→ **547.** Сечение цилиндра, параллельное оси и удаленное от нее на расстояние, равное половине радиуса, имеет площадь S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

548. Хорду основания цилиндра видно из центра этого основания под углом α. Отрезок, соединяющий центр другого основания с серединой данной хорды, равен d и образует с плоскостью основания угол β. Найдите высоту и радиус цилиндра.

→ **549.** Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как $\pi:4$. Докажите, что данный цилиндр равносторонний.

550. Плоскость, параллельная оси цилиндра и удаленная от нее на расстояние m, отсекает от окружности основания дугу α. Угол между диагональю полученного сечения и образующей цилиндра равен β. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

→ **551.** Сечение цилиндра, параллельное оси, отсекает от окружности основания дугу α. Отрезок, соединяющий центр основания цилиндра с точкой окружности другого основания, равен l и образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь сечения.

552. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площади которых равны 11 см^2 и 60 см^2. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

553. Через образующую цилиндра AA_1 проведено осевое сечения AA_1B_1B, площадь которого равна Q, и сечение AA_1C_1C, плоскость которого образует с плоскостью данного осевого сечения угол φ. Найдите площадь сечения BB_1C_1C.

→ **554.** Сечение цилиндра, площадь которого равна S, параллельно оси цилиндра и отсекает от окружности основания дугу α. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

Уровень В

555. Плоскость, образующая с плоскостями оснований цилиндра углы $60°$, пересекает основания цилиндра по хордам длинами 6 см и 8 см. Радиус цилиндра равен 5 см. Найдите его высоту. Сколько решений имеет задача?

→ **556.** Плоскость α пересекает плоскости оснований цилиндра по прямым, которые касаются оснований цилиндра в точках A и B. Найдите длину отрезка AB, если угол между плоскостью α и плоскостью основания равен φ ($\varphi \neq 90°$), а радиус цилиндра R.

557. Концы отрезка AB, длина которого равна 25 см, лежат на окружностях оснований цилиндра. Найдите:

а) расстояние от данного отрезка до оси цилиндра, если высота цилиндра равна 15 см, а радиус 26 см;

б) площадь осевого сечения цилиндра, если радиус цилиндра равен 20 см, а расстояние от оси до прямой AB составляет 16 см.

558. Вершины квадрата лежат на окружностях оснований цилиндра, радиус которого равен 10,5 см, а высота 3 см. Найдите сторону квадрата. Сколько решений имеет задача?

→ **559.** Сечение цилиндра, параллельное оси, пересекается с осевым сечением, причем прямая пересечения делит осевое сечение на части величиной 4 см^2 и 36 см^2, а сечение, параллельное оси, — на две равновеликие части. Найдите площадь сечения, параллельного оси.

Повторение перед изучением § 13

Теоретический материал

- длина окружности и площадь круга (9 класс)
- решение прямоугольных треугольников (8 класс)

Задачи

560. Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AD и две равные наклонные AB и AC. Найдите угол между плоскостями ABC и α, если $AB = AC = 26$ см, $BC = 48$ см, $AD = 5$ см.

561. Из точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Найдите радиус окружности, если расстояния от центра окружности до данных хорд равны 9 см и 12 см.

§ 13. КОНУС

13.1. Конус и его элементы

Определение

Конусом (точнее, **круговым конусом**) называется тело, которое состоит из круга (***основания конуса***), точки, не принадлежащей плоскости этого круга (***вершины конуса***), и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются ***образующими конуса***.

Конус — от греческого «конос» — сосновая шишка.

Конус называется ***прямым***, если прямая, проходящая через вершину конуса и центр окружности основания, перпендикулярна плоскости основания (рис. 166). Так как в школьном курсе будут рассматриваться только прямые круговые конусы, в дальнейшем договоримся называть их просто конусами.

На рисунке 166 изображен конус с вершиной P и центром основания O. Отрезок PA — образующая этого конуса, а отрезок OA — радиус его основания (или радиус конуса).

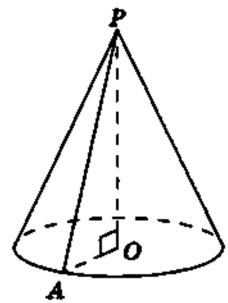


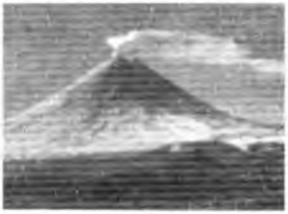
Рис. 166. Конус

Высотой конуса называется перпендикуляр, проведенный из вершины конуса к плоскости основания. Очевидно, что в конусе высота соединяет вершину с центром основания. Например, на рисунке 166 высотой конуса является отрезок PO.

Все образующие конуса являются наклонными к плоскости основания, которые проведены из вершины конуса и имеют равные проекции. Отсюда следует, что ***все образующие конуса равны и составляют равные углы с плоскостью основания***.

Конус является телом вращения, которое получается вращением прямоугольного треугольника вокруг его катета. Например, на рисунке 166 изображен конус, полученный вращением прямоугольного треугольника POA вокруг катета PO. Таким образом, ***прямая, содержащая высоту конуса, является его осью***.

Формы конусов (иначе их называют коническими формами) имеют многие тела, встречающиеся в природе и технике, в архитектуре и быту (рис. 167).


а


б


в


г

Рис. 167. Конические формы

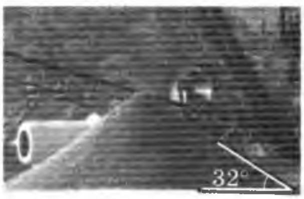
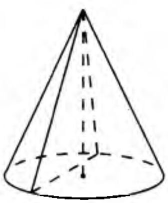
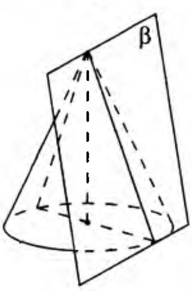


Рис. 168. Коническая насыпь

В физике, строительстве, сельском хозяйстве и горном деле используется понятие угла естественного уклона сыпучего материала, то есть угла наклона образующей к плоскости основания конуса, который образуется свободной поверхностью насыпи (рис. 168). Этот угол связан с коэффициентом трения и зависит от состава, формы, влажности и удельного веса материала (для песка он составляет от 20° до 40°, для грунта — от 17° до 55°, для зерна — от 20° до 30°). По углу естественного уклона определяют, в частности, максимально допустимые углы скоса карьеров, насыпей, штабелей и т. п.


а



б

Рис. 169. Сечения конуса, проходящие через его вершину

13.2. Сечения конуса. Усеченный конус

Рассмотрим некоторые виды сечений конуса. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, боковые стороны которого — образующие данного конуса (рис. 169, *а*). В частности, равнобедренным треугольником является осевое сечение конуса (рис. 169, *б*), причем высотой этого треугольника служит высота конуса, а основанием — диаметр основания конуса. Если диаметр основания конуса равен образующей, то осевое сечение конуса — равносторонний

треугольник; такой конус называется ***равносторонним***. Плоскость осевого сечения является плоскостью симметрии конуса (обоснуйте этот факт самостоятельно).

✹ Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащего эту образующую, называется ***касательной плоскостью к конусу***. Плоскость β на рис. 169, *б* является касательной к конусу.

Отдельного рассмотрения заслуживает сечение конуса, параллельное плоскости основания.

Теорема **(о сечении конуса, параллельном плоскости основания)**

Сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, является кругом, центр которого лежит на оси конуса. Образующая и высота конуса делятся плоскостью этого сечения на пропорциональные части.

Доказательство

☐ Пусть плоскость α, параллельная плоскости основания конуса, пересекает его высоту PO в точке O_1, а образующую PA — в точке A_1 (рис. 170).

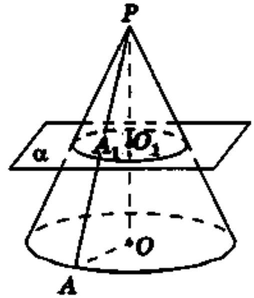


Рис. 170. Сечение конуса, параллельное плоскости основания

Рассмотрим преобразование гомотетии с центром P, которое переводит плоскость основания конуса в плоскость α. Оно совмещает основание конуса с его сечением плоскостью α, а точку O — с точкой O_1. Значит, сечение конуса плоскостью α является кругом, центр которого лежит на оси конуса.

Рассмотрим теперь треугольники PO_1A_1 и POA. Они гомотетичны, поэтому подобны. Из подобия треугольников следует пропорциональность их сторон: $\frac{PA_1}{PA}=\frac{PO_1}{PO}$, то есть $\frac{PA_1}{A_1A}=\frac{PO_1}{O_1O}$. Так как PA — произвольная образующая конуса, то плоскость α делит образующую и высоту конуса на пропорциональные части. ■

Следствие

Площадь сечения конуса, параллельного плоскости основания, и площадь основания относятся как квадраты расстояний от вершины конуса до плоскостей сечения и основания.

Таким образом, плоскость, параллельная плоскости основания конуса и пересекающая его образующие, отсекает конус, подобный данному, и тело, которое называется ***усеченным конусом***. Основание данного конуса и круг, полученный в сечении, называются ***основаниями усеченного конуса***, а перпендикуляр, проведенный из точки одного основания к плоскости другого основания,— ***высотой усеченного конуса***. Очевидно, что высотой усеченного конуса является, в частности, отрезок, соединяющий центры его оснований. Отрезки образующих данного конуса, ограниченные плоскостями оснований усеченного конуса, называются ***образующими усеченного конуса***. Все образующие усеченного конуса равны и наклонены к плоскости каждого из оснований под равными углами (объясните почему).

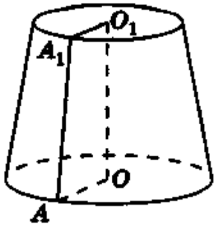


Рис. 171. Усеченный конус

На рисунке 171 изображен усеченный конус с высотой OO_1 и образующей AA_1.

Усеченный конус является телом, которое получается вращением прямоугольной трапеции вокруг ее меньшей боковой стороны. Так, на рисунке 171 изображен усеченный конус, полученный вращением прямоугольной трапеции OO_1A_1A вокруг стороны OO_1. Таким образом, ***прямая, проходящая через центры оснований усеченного конуса, является его осью***.

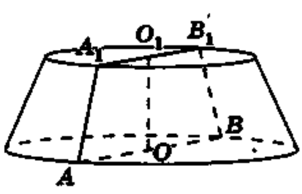


Рис. 172. Осевое сечение усеченного конуса

Осевое сечение усеченного конуса представляет собой равнобедренную трапецию, основаниями которой являются диаметры оснований усеченного конуса, а боковыми сторонами — его образующие. Так, на рисунке 172 осевое сечение усеченного конуса — равнобедренная трапеция AA_1B_1B.

Задача

Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r ($R>r$), а образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь осевого сечения.

Решение

Пусть равнобедренная трапеция AA_1B_1B (рис. 173) — осевое сечение усеченного конуса

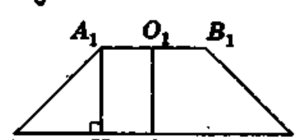


Рис. 173

с центрами оснований O и O_1 (см. рис. 172). По условию задачи $AO=R$, $A_1O_1=r$, следовательно, $AB=2R$, $A_1B_1=2r$. Так как плоскость сечения содержит прямую OO_1, то по признаку перпендикулярности плоскостей плоскость сечения перпендикулярна плоскости основания. Проведем $A_1H \perp AB$. Тогда прямая A_1H перпендикулярна плоскости основания конуса по свойству перпендикуляра к прямой пересечения двух перпендикулярных плоскостей. Отрезок AH — проекция образующей A_1A на плоскость большего основания конуса. Тогда угол A_1AH — угол между образующей и плоскостью основания; по условию задачи $\angle A_1AH=45°$. Так как O_1O и A_1H — высоты трапеции, то $OH=O_1A_1=r$, $AH=R-r$. Из треугольника A_1AH ($\angle H=90°$, $\angle A=45°$, $AH=R-r$) имеем $A_1H=R-r$. Итак, для площади осевого сечения AA_1B_1B получаем:

$$S=\frac{A_1B_1+AB}{2}\cdot AH,\ S=\frac{2r+2R}{2}\cdot(R-r)=R^2-r^2.$$

Ответ: R^2-r^2.

Заметим, что в некоторых задачах об усеченных конусах целесообразно рассматривать полный конус, из которого получен данный усеченный конус.

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

562*. Всегда ли образующая конуса больше его высоты? Всегда ли высота конуса больше радиуса его основания?

563*. Может ли осевое сечение конуса быть:

а) прямоугольным треугольником;

б) треугольником с углами 50°, 60° и 70°;

в) треугольником с углами 15°, 15° и 150°?

564. Сечение конуса, параллельное плоскости основания, проходит через середину высоты. Во сколько раз площадь сечения меньше площади основания конуса?

565. Является ли усеченный конус частным случаем конуса?

МОДЕЛИРУЕМ

566.* Заполните водой до половины стакан конической формы и немного наклоните его. Изобразите линию, по которой поверхность воды касается стенок стакана. Является ли эта линия окружностью?

→ **567.*** Насыпьте на стол немного сахара, муки, крупы так, чтобы образовались конусообразные горки. Одинаковую ли форму они имеют? Какой из взятых сыпучих материалов имеет наибольший угол естественного уклона?

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

568.* Образующая конуса равна 25 см, а высота 24 см. Найдите радиус основания конуса и площадь осевого сечения.

569.* Прямоугольный треугольник с гипотенузой 18 см и острым углом 30° вращается вокруг катета, прилежащего к данному углу. Найдите высоту и радиус основания полученного при вращении конуса. Определите вид его осевого сечения.

→ **570.*** Высота конуса равна H. Найдите образующую и радиус основания конуса, если образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

571. Куча песка высотой 1,5 м имеет форму конуса. Найдите площадь той части строительной площадки, которую занимает куча песка, если угол естественного уклона песка равен 25°.

572. Радиус основания конуса равен 4 см, а осевое сечения конуса — прямоугольный треугольник. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 30°.

→ **573.** Радиус основания конуса равен R, а угол между образующей и высотой 60°. Найдите площадь сечения, проведенного через две взаимно перпендикулярные образующие.

574. Высота конуса равна 12 м, а радиус основания $\sqrt{145}$ м. Сечение, проведенное через вершину, пересекает основание конуса по хорде, удаленной от центра основания на 9 м. Найдите площадь сечения.

575. Через вершину конуса с радиусом основания 4 см проведено сечение площадью $2\sqrt{21}$ см^2. Данное сечение пересекает основание конуса по хорде, которую видно из центра основания конуса под углом 60°. Найдите высоту конуса.

576. Высота конуса равна 24 см. На расстоянии 8 см от вершины конуса проведено сечение, параллельное плоскости основания. Найдите:

а) длины отрезков, на которые данное сечение делит образующую, если длина образующей равна 30 см;

б) площадь основания конуса, если площадь данного сечения равна 9π см^2.

577. Радиус основания конуса равен 16 см. Параллельно плоскости основания проведено сечение, площадь которого равна 16π см^2. Найдите высоту конуса, если данное сечение удалено от вершины конуса на 5 см.

578. Прямоугольная трапеция $ABCD$ (рис. 174) вращается вокруг стороны AB. Определите длины радиусов оснований и высоты полученного усеченного конуса.

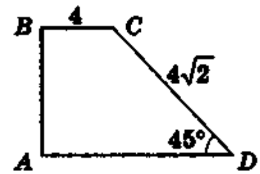


Рис. 174

579. Дан усеченный конус. Найдите:

а) образующую, если радиусы оснований конуса равны 2 м и 5 м, а высота 4 м;

б) высоту, если радиусы оснований конуса равны 3 м и 5 м, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°.

580. Прямоугольная трапеция с боковыми сторонами 12 см и 13 см и меньшим основанием 3 см вращается вокруг меньшей боковой стороны. Найдите площадь осевого сечения полученного усеченного конуса.

581. Площади оснований усеченного конуса равны 9π см^2 и 49π см^2. Найдите площадь сечения, параллельного плоскостям оснований и проходящего через середину высоты конуса.

Уровень Б

582. Площадь осевого сечения конуса равна $9\sqrt{3}$ см^2. Найдите радиус основания и высоту конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом 30°.

583. Найдите площадь осевого сечения конуса, если радиус его основания равен 15 см, а центр основания удален от образующей на 12 см.

584. Сечение, проведенное через вершину конуса, пересекает его основание по хорде длиной 18 см, которую видно из центра основания под углом $60°$. Площадь данного сечения равна 162 см^2. Найдите угол наклона плоскости сечения к плоскости основания конуса.

585. Через вершину конуса проведено сечение, площадь которого равна S. Плоскость сечения пересекает основание конуса по хорде, которую видно из вершины конуса под углом β. Найдите площадь осевого сечения конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

586. Через вершину конуса, высота которого равна H, проведена плоскость, наклоненная к плоскости основания под углом φ. Полученное сечение пересекает основание конуса по хорде, стягивающей дугу α $(\alpha<180°)$. Найдите площадь сечения.

587. Высота конуса равна 18 см, а площадь его основания 63π см^2. Найдите длины отрезков, на которые делят высоту два сечения, параллельные плоскостям оснований, если площади этих сечений составляют 7π см^2 и 28π см^2.

588. Радиус основания конуса равен 12 см. Найдите площади сечений, которые перпендикулярны высоте конуса и делят ее на три равные части.

589. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как $2:5$. Найдите площадь осевого сечения конуса, если его образующая равна $6\sqrt{2}$ см и наклонена к плоскости основания под углом $45°$.

590. Площади оснований усеченного конуса равны 49π см^2 и 625π см^2. Найдите площадь осевого сечения конуса, если известно, что это сечение можно вписать в окружность большего основания.

591. Найдите образующую усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 4 см и 8 см, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол $30°$.

Уровень В

592. Радиус основания конуса равен 12 см, а высота 5 см. Какую наибольшую площадь может иметь сечение, проходящее через вершину конуса?

593. Через середину высоты конуса проведена прямая, параллельная его образующей l. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри конуса.

594. Через вершину конуса проведена секущая плоскость под углом α к плоскости основания. Она пересекает основание конуса по хорде, стягивающей дугу β ($\beta<180°$). Точка высоты конуса, удаленная от данной хорды на расстояние d, равноудалена от плоскости сечения и плоскости основания. Найдите площадь сечения.

595. Плоскость сечения конуса, проходящая через его вершину, удалена от середины высоты на 6 см. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса равен 25 см, а высота 20 см.

596. Высота конуса равна 24 см, а образующая — 26 см. Прямая, пересекающая конус и параллельная плоскости его основания, удалена от высоты конуса на 3 см, а от плоскости основания — на 12 см. Найдите длину отрезка данной прямой, заключенного внутри конуса.

597. Образующая усеченного конуса равна сумме радиусов его оснований, а высота — их разности. Найдите отношение радиусов оснований конуса.

Повторение перед изучением § 14

Теоретический материал

- окружность; касательная к окружности (7 класс)
- уравнение окружности (9 класс)

Задачи

598. На плоскости прямая AB касается окружности радиуса 12 см в точке C. Найдите длину отрезка AB, если точки A и B удалены от центра окружности на 15 см и 20 см соответственно.

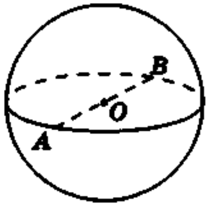
599. Отрезок AO — перпендикуляр к плоскости окружности с центром O и радиусом 6 см. Найдите расстояние от точки A до:

а) касательной к данной окружности, если $AO=8$ см;

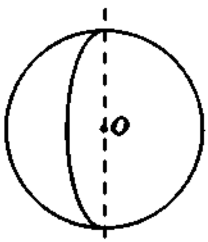
б) хорды окружности, стягивающей дугу в 60°, если $AO=5$ см.

§ 14. ШАР И СФЕРА

14.1. Шар и его сечения



а



б

Рис. 175. Шар

Сфера – от греческого «сфайра» – круглое тело.

Как известно, множество всех точек плоскости, удаленных от данной точки на расстояние, не превышающее заданное, называется кругом. В пространстве все точки, обладающие аналогичным свойством, образуют шар (рис. 175, *а*).

Определение

Шаром называется множество всех точек пространства, удаленных от данной точки на расстояние, не превышающее заданное.

Данную точку называют *центром шара*, а заданное расстояние — *радиусом шара*.

Сферой называется поверхность шара.

Таким образом, сфера состоит из всех точек пространства, удаленных от центра шара (он является также и центром сферы) на заданное расстояние *R* (радиус сферы). Радиусом шара (сферы) называется также любой отрезок, соединяющий центр с точкой сферы. На рисунке 175, *а* таким является отрезок *OA*.

Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется *хордой сферы*. Хорда, проходящая через центр сферы, называется *диаметром шара (сферы)*. Концы диаметра называются *диаметрально противоположными точками*. На рисунке 175, *а* точки *A* и *B* — диаметрально противоположные точки сферы, *AB* — диаметр шара (сферы).

Шар является телом вращения, которое получается вращением полукруга вокруг его диаметра (рис. 175, *б*).

Рассматривая взаимное расположение шара и плоскости в пространстве, целесообразно провести аналогию с расположением круга и прямой

на плоскости (рис. 176, *а–в*). Три случая расположения шара относительно плоскости определяются соотношением между радиусом шара и расстоянием от его центра до плоскости:

1) если расстояние от центра шара до плоскости больше радиуса шара, то шар и плоскость не имеют общих точек (рис. 177, *а*): действительно, если $OA \perp \alpha$, то для любой точки M плоскости α $OM > OA > R$, то есть плоскость α не содержит точек шара;

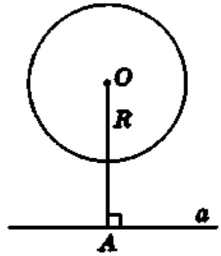
2) если расстояние от центра шара до плоскости равно радиусу шара, то плоскость имеет с шаром (и сферой, которая его ограничивает) единственную общую точку (рис. 177, *б*): в этом случае для произвольной точки M плоскости α, которая не совпадает с A, $OM > OA = R$, то есть плоскость α имеет с шаром единственную общую точку A (более подробно этот случай будет рассмотрен в п. 14.2);

3) если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса шара, то шар и плоскость пересекаются по кругу (рис. 177, *в*).

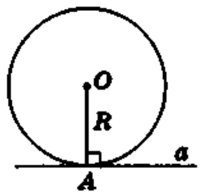
Рассмотрим последний случай подробно.

Теорема **(о сечении шара)**

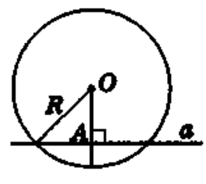
Если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса шара, то сечение шара данной плоскостью является кругом. Центр этого круга находится в основании перпендикуляра, проведенного из центра шара к плоскости сечения.



а

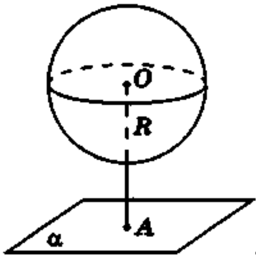


б

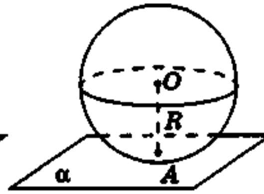


в

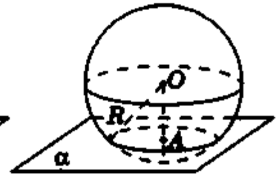
Рис. 176. Взаимное расположение круга и прямой на плоскости



а



б



в

Рис. 177. Взаимное расположение шара и плоскости в пространстве

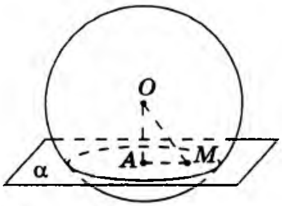


Рис. 178. К доказательству теоремы о сечении шара

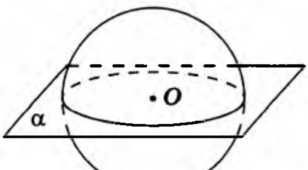
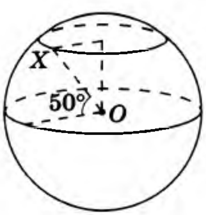


Рис. 179. Диаметральная плоскость и большой круг

а



б

Рис. 180. Применение сечений шара в географии

Доказательство

□ Пусть α — секущая плоскость шара с центром O и радиусом R, $OA \perp \alpha$ (рис. 178). Рассмотрим произвольную точку M шара, принадлежащую плоскости α. Из прямоугольного треугольника OAM ($\angle A = 90°$) по теореме Пифагора $OM^2 = OA^2 + AM^2$. Так как $OM \leqslant R$, то $AM \leqslant \sqrt{R^2 - OA^2}$, то есть расстояние от точки A до точки M не превышает $r = \sqrt{R^2 - OA^2}$. Это значит, что любая точка M сечения принадлежит кругу с центром A и радиусом r, и наоборот: любая точка M этого круга принадлежит шару (обоснуйте данный факт самостоятельно). Следовательно, сечение шара плоскостью α является кругом с центром в точке A.

Теорема доказана. ■

Следствие

Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы плоскостью является окружностью. Центр этой окружности находится в основании перпендикуляра, проведенного из центра сферы к плоскости сечения.

Заметим, что в случае, когда секущая плоскость проходит через центр шара (такая плоскость называется ***диаметральной***), центры шара и сечения совпадают, а радиус сечения равен радиусу шара (рис. 179).

Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии (докажите это самостоятельно).

Сечение шара диаметральной плоскостью называется ***большим кругом***, а окружность этого сечения — ***большой окружностью***.

На географическом глобусе линия экватора представляет собой большую окружность (рис. 180, *а*). Географические параллели — это линии сечений поверхности Земли плоскостями, параллельными плоскости экватора, а градусы северной и южной широты указывают угол между соответствующими радиусами земного шара — например, город Харьков находится на 50° северной широты (рис. 180, *б*).

Задача

Через конец радиуса шара проведена плоскость под углом 45° к данному радиусу. Найдите площадь получившегося сечения, если радиус шара равен 6 см.

Решение

Пусть круг с центром O_1 — сечение шара с центром O и радиусом $OA = 6$ см (рис. 181). Тогда по теореме о сечении шара OO_1 — перпендикуляр к плоскости сечения. Значит, O_1A — проекция радиуса OA на плоскость сечения, $\angle OAO_1$ — угол между OA и плоскостью сечения; по условию задачи $\angle OAO_1 = 45°$. Найдем площадь сечения.

Рис. 181

Из треугольника OAO_1 ($\angle O_1 = 90°$, $\angle A = 45°$, $OA = 6$ см)

$$O_1A = OA\cos 45°, \quad O_1A = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \ \text{(см)}.$$

Искомая площадь S равна πr^2, где $r = O_1A$. Следовательно,

$$S = \pi\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18\pi \ (\text{см}^2).$$

Ответ: 18π см^2.

14.2. Касательная плоскость к сфере

Рассмотрим более подробно случай, когда шар и плоскость имеют единственную общую точку.

Определение

Касательной плоскостью к сфере (шару) называется плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку.

Общая точка касательной плоскости и сферы называется ***точкой касания***. На рисунке 182 плоскость α касается сферы (шара) с центром O в точке A.

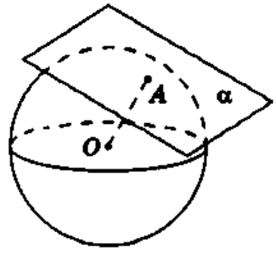


Рис. 182. Касательная плоскость к сфере

Определим взаимное расположение касательной плоскости и радиуса сферы, проведенного в точку касания.

Теорема (свойство касательной плоскости)
Касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу сферы, проведенному в точку касания.

Доказательство

☐ Пусть плоскость α касается сферы с центром O в точке A (рис. 183). Докажем методом от противного, что $OA \perp \alpha$.

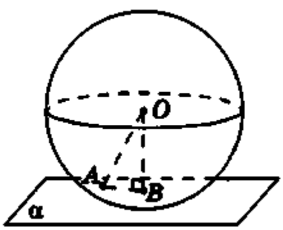


Рис. 183. К доказательству свойства касательной плоскости

Если это не так, то отрезок OA является наклонной к плоскости α. Проведем перпендикуляр OB к плоскости α. Очевидно, что $OB < OA$, то есть расстояние от центра сферы до точки B меньше радиуса сферы. Отсюда следует, что сфера и плоскость α пересекаются по окружности. Но это противоречит тому, что плоскость α касательная, то есть сфера и плоскость α имеют единственную общую точку. Значит, наше предположение неверно, и $OA \perp \alpha$. ■

Имеет место также обратное утверждение (***признак касательной плоскости***): **если радиус сферы является перпендикуляром, проведенным из центра сферы к плоскости, проходящей через другой конец радиуса, то данная плоскость является касательной к сфере.**

Докажите это утверждение самостоятельно.

Определение

Касательной прямой к сфере (шару) называется прямая, принадлежащая касательной плоскости к данной сфере (шару) и проходящая через точку касания.

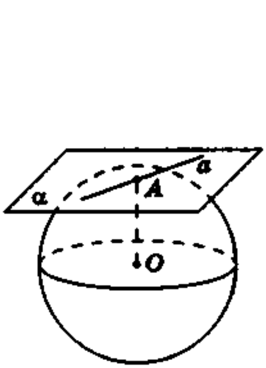


Рис. 184. Касательная прямая к сфере

Из только что доказанного свойства касательной плоскости следует, что касательная прямая перпендикулярна радиусу сферы (шара), проведенному в точку касания. На рисунке 184 плоскость α — касательная плоскость к сфере с центром O, прямая a — касательная прямая, которая касается данной сферы в точке A, $OA \perp a$.

Очевидно, что все прямые плоскости α, проходящие через точку A, являются касательными прямыми к сфере. Более того, прямая, проходящая через точку сферы перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку, является касательной прямой к сфере (обоснуйте этот факт самостоятельно).

Задача

Шар касается всех сторон правильного треугольника. Найдите радиус шара, если сторона треугольника равна $8\sqrt{3}$ см, а расстояние от центра шара до плоскости треугольника 3 см.

Решение

Пусть стороны треугольника ABC касаются шара с центром O в точках K, M и N (рис. 185). Проведем перпендикуляр OO_1 к плоскости ABC. Так как AB, BC и AC — касательные к шару, то $OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$. Отрезки O_1K, O_1M и O_1N — проекции наклонных OK, OM и ON на плоскость ABC. По теореме о трех перпендикулярах $O_1K \perp AB$, $O_1M \perp BC$, $O_1N \perp AC$. Так как $OK = OM = ON$ как радиусы шара, точка O равноудалена от сторон треугольника ABC.

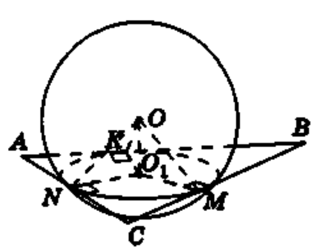


Рис. 185

Следовательно, точка O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а отрезки O_1K, O_1M, O_1N — радиусы этой окружности. По формуле радиуса вписанной окружности для правильного треугольника $O_1K = O_1M = O_1N = \dfrac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 4$ (см). Из прямоугольного треугольника OO_1K ($\angle O_1 = 90°$, $OO_1 = 3$ см, $O_1K = 4$ см) по теореме Пифагора $OK = 5$ см.

Ответ: 5 см.

14.3*. Геометрические тела и их поверхности

Понятие «геометрическое тело» — одно из центральных понятий стереометрии. Но для того чтобы дать строгое определение геометрического тела, нужно ввести несколько вспомогательных понятий.

Итак, точка называется ***граничной точкой фигуры***, если среди сколь угодно близких к ней точек есть точки, как принадлежащие данной фигуре, так и не принадлежащие ей. Пусть, например,

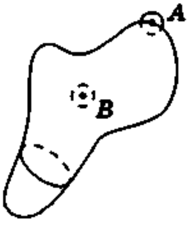


Рис. 186. Граничные и внутренние точки фигуры

на рисунке 186 точка A — граничная точка фигуры F. Это значит, что любой шар с центром A содержит как точки фигуры F, так и точки, не принадлежащие данной фигуре. Множество всех граничных точек образует ***границу фигуры***.

Точка фигуры, не принадлежащая ее границе, называется ***внутренней точкой фигуры***. Каждая внутренняя точка фигуры характеризуется тем, что все точки пространства, расположенные достаточно близко к ней, также принадлежат фигуре. Пусть на рисунке 186 точка B — внутренняя точка фигуры F. Тогда существует шар с центром B, все точки которого принадлежат фигуре F.

Фигура называется ***ограниченной***, если ее можно поместить внутрь какой-нибудь сферы. Очевидно, что отрезок, куб, тетраэдр — ограниченные фигуры, а прямая, плоскость, двугранный угол — неограниченные.

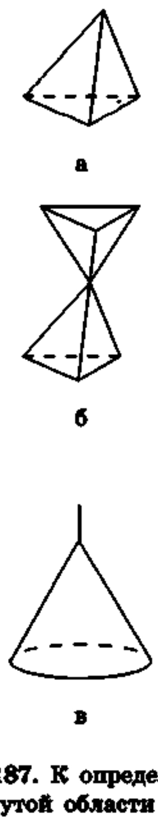


Рис. 187. К определению замкнутой области

И, наконец, фигура называется ***областью***, если все ее точки внутренние и любые две из них можно соединить непрерывной линией, полностью принадлежащей этой фигуре. Область вместе с ее границей называется ***замкнутой областью***. Так, тетраэдр на рис. 187, *а* — замкнутая область. Однако фигура на рисунке 187, *б*, состоящая из двух тетраэдров с общей вершиной, не является замкнутой областью, так как любая линия, соединяющая внутренние точки разных тетраэдров, проходит через их общую вершину, которая не является внутренней точкой фигуры. Не является замкнутой областью и фигура на рисунке 187, *в*, представляющая собой конус со «шпилем» в виде отрезка, так как все точки «шпиля», кроме одной, не являются граничными точками области, ограниченной данным конусом (объясните почему).

Итак, перейдем к определению геометрического тела и его поверхности.

Определение

Геометрическим телом (или просто **телом**) называется ограниченная замкнутая область в пространстве.

Поверхностью геометрического тела называется его граница.

Заметим, что понятия внутренней и граничной точек и области можно ввести и на плоскости, если в определениях, приведенных в этом пункте выше, вместо шара и сферы рассматривать круг и окружность соответственно. Например, плоский многоугольник — это ограниченная замкнутая область, границей которой является многоугольник.

росы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

600.* Диаметр шара равен 18 см. Принадлежит ли данному шару точка, удаленная от его центра:

а) на 11 см; б) на 9 см; в) на 6 см?

Какая из данных точек принадлежит сфере, ограничивающей данный шар?

601.* Дан шар с центром в точке O и точка пространства A. Опишите расположение точки A относительно данного шара, если длина отрезка OA:

а) больше радиуса шара;

б) равна половине диаметра шара;

в) меньше радиуса шара.

602.* Точки A и B принадлежат сфере с центром O и радиусом 6 см. Являются ли данные точки диаметрально противоположными, если:

а) $AB=3$ см; в) $AB=12$ см;

б) $AB=6$ см; г) $AO=BO$?

603. Плоскость α и сфера с центром O имеют общую точку A. Имеют ли они другие общие точки, если:

а) $OA\perp\alpha$;

б) отрезок OA является наклонной к плоскости α?

604. Радиусы трех сечений шара равны r_1, r_2 и r_3. Одно из данных сечений является большим кругом. Чему равен радиус шара, если $r_1<r_3<r_2$?

МОДЕЛИРУЕМ

605*. Диаметр шара можно измерить с помощью штангенциркуля (рис. 188). Объясните принцип такого измерения.

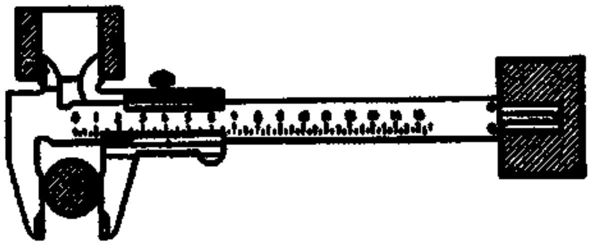


Рис. 188. Измерение шара штангенциркулем

606. Изготовьте из пластилина модель шара. Разрежьте модель так, чтобы плоскость сечения не проходила через центр шара. Какой фигурой является сечение? Как провести перпендикуляр к плоскости сечения, проходящего через центр шара?

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

607*. Точки A и B принадлежат сфере с центром O, точка C — середина отрезка AB. Найдите:

а) расстояние от точки O до прямой AB, если $OA=17$ см, $AB=16$ см;

б) радиус сферы, если $AB=12$ см, $OC=8$ см;

в) длину отрезка AB, если диаметр шара 30 см, $OC=12$ см.

608*. Точки A и B лежат на сфере с центром O. Найдите радиус сферы, если $AB=8\sqrt{3}$ см, $\angle AOB=120°$.

609*. На расстоянии d от центра шара радиуса R проведено сечение площадью S. Найдите:

а) S, если $d=12$ см, $R=18$ см;

б) R, если $d=40$ см, а длина окружности сечения равна 18π см;

в) d, если $S=16\pi$ см^2, а диаметр шара равен 10 см.

610. Каждый из 70 шаров на городской новогодней елке решили украсить гирляндой по большой окружности. Сколько метров гирлянд для этого понадобится, если диаметр каждого шара равен 50 см?

→ **611. Длина сечения сферы равна 6π см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости сечения, если радиус, проведенный в точку сечения, наклонен к его плоскости под углом 60°.**

612. Если два сечения шара равноудалены от его центра, то они равновелики. Докажите. Верно ли обратное утверждение?

613 (опорная). ***Если из точки пространства к сфере проведены две касательные прямые, то расстояния от данной точки до точек касания равны.*** **Докажите.**

614. Все стороны квадрата, площадь которого равна 100 см^2, касаются сферы радиуса 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости квадрата.

→ **615. Все стороны правильного треугольника касаются сферы радиуса 4 см. Найдите площадь треугольника, если его плоскость удалена от центра сферы на 2 см.**

616. Все вершины прямоугольного треугольника с гипотенузой 20 см лежат на сфере, радиус которой равен 26 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

→ **617. Найдите радиус сферы, содержащей все вершины прямоугольника со сторонами 18 см и 24 см, если центр сферы удален от плоскости прямоугольника на 8 см.**

Уровень Б

618. Точки A и B лежат на поверхности шара радиуса 6 см. Найдите расстояние между точками A и B, если расстояние между ними по поверхности шара равно 2π см.

619. Точка A принадлежит шару радиуса 5 см и удалена от центра шара на 3 см. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от точки A до точек сферы, ограничивающей данный шар.

→ **620. Точки A и B — диаметрально противоположные точки сферы радиуса 20 см, точка M принадлежит данной сфере. Найдите расстояния MA и MB, если $MA = 0{,}75MB$.**

621. Через точку M, принадлежащую диаметру шара AB, проведено сечение данного шара, перпендикулярное AB. Найдите:

а) площадь сечения, если $AM = 8$ см, $MB = 2$ см;

б) радиус шара, если $AM : MB = 3 : 1$, а площадь сечения равна 3π см^2.

622. Площадь большого круга шара равна S. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения, площадь которого равна $\frac{3}{4}S$.

→ 623. Радиус шара равен R. Через точку его поверхности проведены две плоскости, одна из которых является касательной к шару, а другая наклонена к ней под углом 30°. Найдите площадь сечения шара второй плоскостью.

624. Город Харьков находится на 50° северной широты (см. рис. 180, *б*). Считая этот город материальной точкой, вычислите путь, который он совершает в течение суток вследствие вращения Земли вокруг своей оси ($R_З \approx 6000$ км).

→ 625. Определите географическую широту населенного пункта, где вы живете, и вычислите путь, который он совершает в течение часа вследствие вращения Земли вокруг своей оси ($R_З \approx 6000$ км).

626. К сфере с центром O проведена касательная плоскость α. Через точку A данной плоскости проведена прямая AO, пересекающая данную сферу в точках C и D. Найдите расстояние от точки A до точки касания, если $AC = 1$ см, $AD = 49$ см.

→ 627. Точка касательной плоскости удалена от точки касания этой плоскости со сферой на 12 см. Найдите расстояние от данной точки до центра сферы, если радиус сферы равен 9 см.

628. Сфера касается граней двугранного угла, который равен 60°. Найдите радиус сферы, если расстояние от ее центра до ребра двугранного угла равно a.

→ 629. Сфера касается граней двугранного угла. Найдите его градусную меру, если радиус сферы равен 8 см, а расстояние между точками касания $8\sqrt{2}$ см.

630. Все вершины плоского многоугольника принадлежат сфере радиуса 25 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости многоугольника, если данный многоугольник является:

а) равнобедренным треугольником с основанием 24 см и углом при основании 75°;

б) равнобедренной трапецией с боковой стороной 18 см и диагональю 24 см, перпендикулярной боковой стороне.

→ **631.** Все стороны плоского многоугольника касаются сферы, центр которой удален от плоскости многоугольника на 3 см. Найдите радиус сферы, если данный многоугольник является:

а) треугольником со сторонами 10 см, 35 см и 39 см;

б) равнобедренной трапецией с основаниями 4 см и 16 см.

Уровень В

632. Радиус шара равен 18 см. Два взаимно перпендикулярных сечения шара, площади которых относятся как 4:9, имеют общую хорду длиной 2 см. Найдите радиусы этих сечений.

→ **633.** В шаре проведены два параллельных сечения, площадь меньшего из которых равна 81π см^2. Диаметр шара, проведенный через центры данных сечений, делится ими в отношении 2:7:1. Найдите длину диаметра.

634 (опорная). *Линией пересечения двух сфер является окружность. Центр этой окружности принадлежит прямой, проходящей через центры данных сфер, а плоскость окружности перпендикулярна этой прямой.* Докажите.

→ **635.** Радиусы двух сфер равны 10 см и 17 см, расстояние между их центрами 21 см. Найдите длину линии пересечения данных сфер.

636. Найдите геометрическое место:

а) центров сфер, проходящих через две данные точки;

б) центров сфер радиуса R, касающихся данной плоскости;

в) центров сечений шара радиуса R, площадь которых равна S.

→ **637.** Найдите геометрическое место:

а) центров сфер радиуса R, проходящих через данную точку A;

б) центров сфер, касающихся данной плоскости α в данной на ней точке A;

в) середин всех хорд данного шара, параллельных данной прямой.

Повторение перед изучением § 15

Теоретический материал

- площадь прямоугольника (8 класс)
- площадь круга (9 класс)
- призма (11 класс, § 7)
- цилиндр (11 класс, § 12)

Задачи

638. В правильной четырехугольной призме площадь основания равна S, а высота — h. Найдите площадь диагонального сечения.

639. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, представляющее собой квадрат. Диаметр цилиндра равен d, а высота — h. На каком расстоянии от оси цилиндра проведено сечение?

Тестовое задание для самопроверки № 3

1. Среди данных тел выберите то, которое не является телом вращения.

а) шар; в) призма;
б) цилиндр; г) конус.

2. Назовите тело, которое получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг катета.

а) конус; в) цилиндр;
б) усеченный конус; г) пирамида.

3. Закончите предложение так, чтобы получилось верное утверждение. Сечение конуса, отсекающее от него меньший конус, проходит...

а) через вершину конуса;
б) перпендикулярно высоте конуса;
в) через две образующие конуса;
г) перпендикулярно плоскости основания конуса.

4. Площадь осевого сечения равностороннего цилиндра равна 36 см^2. Найдите площадь основания цилиндра.

а) 9 см^2; в) 9π см^2;
б) 36π см^2; г) 6π см^2.

5. Площадь большого круга шара равна 16π см^2. Найдите расстояние от центра шара до плоскости, касательной к данному шару.

а) 4 см; в) 2 см;
б) 8 см; г) 4π см.

6. Осевое сечение конуса с радиусом основания R, высотой H и образующей l — равнобедренный прямоугольный треугольник. Среди приведенных равенств выберите неверное.

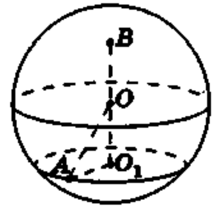
а) $R=H$; в) $H=\frac{\sqrt{2}}{2}l$;
б) $l=R\sqrt{2}$; г) $l=2H$.

7. Сечение, параллельное оси цилиндра с радиусом R и высотой H, имеет форму квадрата и отсекает от окружности основания дугу в 60°. Среди приведенных соотношений выберите верное.

а) $R<H$;   в) $R>H$;

б) $R=H$;   г) $R=2H$.

8. На рисунке точки A и B принадлежат сфере с центром O и радиусом R, точка O_1 — центр закрашенного сечения сферы, $\angle OAO_1=30°$. Найдите длину отрезка O_1B, если точка O принадлежит ему.



а) $0{,}5R$;   в) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$;

б) R;   г) $1{,}5R$.

9. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r ($R>r$), а образующая наклонена к плоскости большего основания под углом α ($\alpha \neq 45°$). Найдите высоту усеченного конуса.

а) $(R-r)\operatorname{tg}\alpha$;   в) $(R-r)\sin\alpha$;

б) $(R-r)\operatorname{ctg}\alpha$;   г) $(R-r)\cos\alpha$.

10. Два параллельных сечения шара имеют площади 9π см^2 и удалены друг от друга на 8 см. Найдите площадь большого круга шара.

а) 9π см^2;   в) 25π см^2;

б) 16π см^2;   г) 36π см^2.

11. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площади которых равны S и Q. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

а) $\sqrt{SQ}$;   в) $S+Q$;

б) $\sqrt{S^2+Q^2}$;   г) $\frac{SQ}{S+Q}$.

12. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник с боковой стороной 6 см и углом 120°. Какую наибольшую площадь может иметь сечение конуса, проведенное через его вершину?

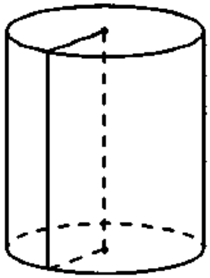
а) $9\sqrt{3}$ см^2;   в) 9 см^2;

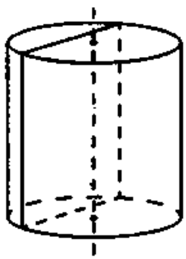
б) $18\sqrt{3}$ см^2;   г) 18 см^2.

Итоги главы III

Итоговый обзор главы III

Цилиндр





Цилиндром (точнее, ***круговым цилиндром***) называется тело, которое состоит из двух кругов (***оснований цилиндра***), не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов

Прямым цилиндром (далее — цилиндром) называется цилиндр, образующие которого перпендикулярны плоскостям оснований

Образующими цилиндра называются отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей, ограничивающих основания

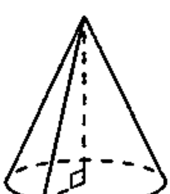
Радиусом цилиндра называется радиус его основания

Высотой цилиндра называется перпендикуляр, проведенный из точки одного основания цилиндра к плоскости другого основания

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований

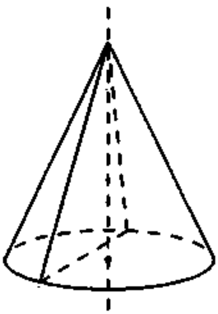
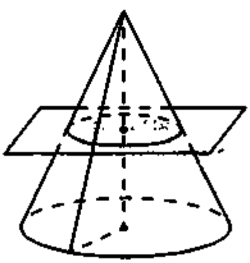
- Основания цилиндра — равные круги, лежащие в параллельных плоскостях
- Все образующие цилиндра параллельны и равны
- Высота цилиндра равна его образующей
- Отрезок, соединяющий центры оснований цилиндра, равен образующей, а значит, и высоте цилиндра
- Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, является прямоугольником

Конус

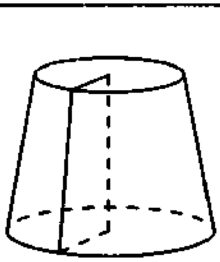


Конусом (точнее, ***круговым конусом***) называется тело, которое состоит из круга (***основания конуса***), точки, не принадлежащей плоскости этого круга (***вершины конуса***), и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания

Окончание таблицы

	Прямым конусом (далее — конусом) называется конус, у которого прямая, проходящая через вершину конуса и центр окружности основания, перпендикулярна плоскости основания
	***Образующими конуса*** называются отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания
	Высотой конуса называется перпендикуляр, проведенный из вершины конуса к плоскости основания
	Осью конуса называется прямая, содержащая высоту конуса
	• Все образующие конуса равны и составляют равные углы с плоскостью основания
	• Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, является равнобедренным треугольником, боковые стороны которого — образующие данного конуса
	• Сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, является кругом, центр которого лежит на оси конуса. Образующая и высота конуса делятся плоскостью этого сечения на пропорциональные части
	Площадь сечения конуса, параллельного плоскости основания, и площадь основания относятся как квадраты расстояний от вершины конуса до плоскостей сечения и основания

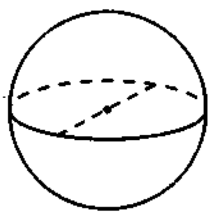
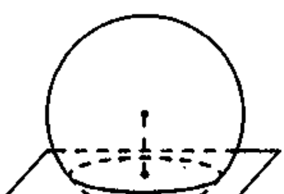
Усеченный конус

	Плоскость, параллельная плоскости основания конуса и пересекающая его образующие, отсекает конус, подобный данному, и тело, которое называется ***усеченным конусом***
	Основаниями усеченного конуса являются основание данного конуса и круг, полученный в сечении
	Высотой усеченного конуса называется перпендикуляр, проведенный из точки одного основания к плоскости другого основания

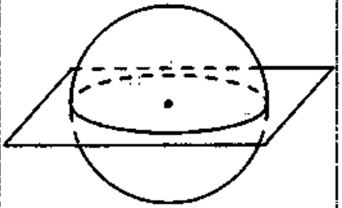
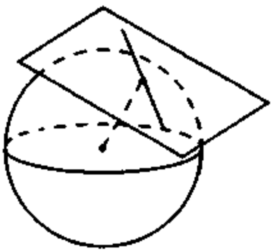
Окончание таблицы

	Образующими усеченного конуса называются отрезки образующих данного конуса, ограниченные плоскостями оснований усеченного конуса ***Осью усеченного конуса*** называется прямая, которая проходит через центры его оснований • Все образующие усеченного конуса равны и наклонены к плоскости каждого из оснований под равными углами • Осевое сечение усеченного конуса представляет собой равнобедренную трапецию, основаниями которой являются диаметры оснований усеченного конуса, а боковыми сторонами — его образующие

Шар и сфера

 	***Шаром*** называется множество всех точек пространства, удаленных от данной точки (***центра шара***) на расстояние, не превышающее заданное (***радиус шара***) ***Сферой*** называется поверхность шара ***Хордой сферы*** называется отрезок, соединяющий две точки сферы ***Диаметром шара (сферы)*** называется хорда, проходящая через центр сферы Если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса шара, то сечение шара данной плоскостью является кругом. Центр этого круга находится в основании перпендикуляра, проведенного из центра шара к плоскости сечения Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы плоскостью является окружностью. Центр этой окружности находится в основании перпендикуляра, проведенного из центра сферы к плоскости сечения

Окончание таблицы

	***Диаметральной плоскостью*** называется секущая плоскость, проходящая через центр шара Сечение шара диаметральной плоскостью называется ***большим кругом***, а окружность этого сечения — ***большой окружностью***
	***Касательной плоскостью к сфере (шару)*** называется плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку (***точку касания***) ***Свойство касательной плоскости.*** Касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу сферы, проведенному в точку касания ***Признак касательной плоскости.*** Если радиус сферы является перпендикуляром, проведенным из центра сферы к плоскости, проходящей через другой конец радиуса, то данная плоскость является касательной к сфере ***Касательной прямой к сфере (шару)*** называется прямая, принадлежащая касательной плоскости к данной сфере (шару) и проходящая через точку касания

Контрольные вопросы к главе III

1. Дайте определение цилиндра. Изобразите цилиндр и опишите его элементы.
2. Какой фигурой является осевое сечение цилиндра; сечение, параллельное основаниям цилиндра; сечение, параллельное оси цилиндра?
3. Дайте определение конуса. Изобразите конус и опишите его элементы.
4. Какой фигурой является сечение, проходящее через вершину конуса; осевое сечение конуса; сечение, параллельное основанию конуса?
5. Изобразите усеченный конус и опишите его элементы.
6. Дайте определение шара и сферы. Какими фигурами являются их сечения?
7. Дайте определение касательной плоскости к сфере. Сформулируйте и докажите свойство касательной плоскости.

Дополнительные задачи к главе III

640. Радиус цилиндра равен R. На каком расстоянии от оси цилиндра проходит параллельное ей сечение, площадь которого вдвое меньше площади осевого сечения?

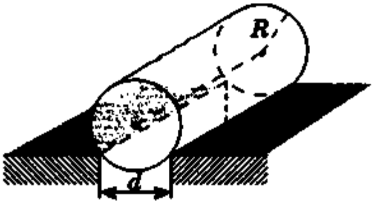


Рис. 189

641. Цилиндр радиуса R погружен в зазор между двумя плитами, ширина которого равна d ($d<2R$), так, что ось цилиндра параллельна краям плит (рис. 189). На какую глубину цилиндр погружен в зазор?

642. Три образующие конуса длиной l попарно образуют углы 60°. Найдите высоту и радиус основания конуса.

643. Осевое сечение конуса равновелико квадрату, построенному на радиусе основания как на стороне. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания конуса.

644. Периметр осевого сечения конуса равен 32 см, а высота 8 см. Найдите площадь сечения, проведенного через середину высоты конуса параллельно плоскости основания.

645. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 150°, а площадь этого сечения равна Q. Найдите площадь наибольшего сечения конуса, которое проходит через его вершину.

646. Тело ограничено двумя сферами с общим центром. Докажите, что площадь сечения тела плоскостью, проходящей через центры сфер, равна площади его сечения плоскостью, касательной к меньшей сфере.

647. Через точки A и B, которые делят радиус шара OC на три равные части, проведены сечения шара, перпендикулярные OC. Найдите отношение площадей этих сечений.

Задачи повышенной сложности

648. Дан конус с высотой PO и равносторонний цилиндр с центрами оснований P и O. В каком отношении образующая конуса делит образующую цилиндра, если угол при вершине осевого сечения конуса равен 120°?

649. Концы отрезка длиной $\sqrt{41}$ см принадлежат окружностям оснований цилиндра, радиус которого равен 2 см. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы данный отрезок пересекал его ось?

650. Два правильных треугольника не лежат в одной плоскости и имеют общую сторону. Докажите, что все их вершины лежат на одной сфере. Существует ли сфера, касающаяся всех сторон данных треугольников?

651. Сфера радиуса R проходит через все вершины одной грани куба и касается противолежащей грани. Найдите ребро куба.

652. Докажите, что все общие точки цилиндра (конуса) и плоскости, касательной к нему, расположены на образующей цилиндра (конуса), которая является их общим отрезком.

Историческая справка

Понятие тела вращения было известно еще с догреческих времен. Определения цилиндра, конуса и шара приведены в «Началах» Евклида, но немалая заслуга в исследовании этих тел принадлежит его современникам и последователям — Евдоксу, Аполлонию, Архимеду, Паппу. Так, Аполлоний Пергский (ок. 262–190 гг. до н. э) в своей работе «Конические сечения» установил, что сечениями конической поверхности могут быть окружность, эллипс, парабола или гипербола.

Новым толчком к изучению поверхностей и тел вращения стало возникновение и развитие дифференциальной геометрии, которая позволила исследовать плоские и пространственные кривые и поверхности методами математического анализа. Ее возникновение было, в свою очередь, обусловлено практическими потребностями математической картографии, в частности необходимостью полностью или частично изображать земную поверхность на плоскости.

В историю развития дифференциальной геометрии вписаны и имена ученых, чья научная деятельность связана с Украиной. Выдающийся математик и педагог, автор «Очерков по теории поверхностей» Вениамин Федорович Каган (1869–1953), который экстерном окончил Киевский университет, в начале XX века занимался плодотворной научной и просветительской деятельностью в Одессе. Профессор Киевского университета, автор работы «Элементы теории поверхностей» Борис Яковлевич Букреев (1859–1962) — один из основателей Киевского математического общества, которое было и остается центром передовых научных идей.

В. Ф. Каган

Б. Я. Букреев

Тематика сообщений и рефератов к главе III

1. Сечения конуса и цилиндра, их уравнения и свойства.
2. Фигуры вращения. Гиперболоид и параболоид.
3. Винтовые линии (спирали) и их применение.
4. Поверхности вращения в архитектуре и искусстве.
5. Изучение Птолемеем размеров Земли.

Рекомендованные источники информации

1. Глейзер Г. И. История математики в школе. IX–X кл. — М.: Просвещение, 1982.
2. Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.
3. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. Т. 2. Стереометрия, преобразования пространства. — М.: МЦНМО, 2006.
4. Тадеєв В. О. Геометрія. Фігури обертання. Векторно-координатний метод: Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. М. Й. Ядренка.— Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2004.
5. Дорфман А. Г. Оптика конических сечений. *http://www.math.ru/lib/plm/*31
6. Миракьян Г. М. Прямой круговой цилиндр. *http://www.math.ru/lib/plm/*18
7. Візантійська архітектура. *http://www.byzantium.ru/arch.ph.*

Глава IV
Объемы и площади поверхностей геометрических тел

§ 15. Объем многогранников. Объем параллелепипеда, призмы и цилиндра

§ 16. Объемы пирамиды, конуса и шара

§ 17. Площади поверхностей геометрических тел

То, чем в предыдущие эпохи занимались только зрелые умы ученых мужей, в более позднее время стало доступным для понимания юношей.

Георг Вильгельм Фридрих Гегель,
немецкий философ

С древних времен люди применяли геометрию для решения конкретных житейских проблем — нахождения объемов сосудов, строений и кораблей, количества краски, необходимой для ремонта помещения. На основании практического опыта были разработаны методы вычисления объемов тел и площадей поверхностей. Но нахождение соответствующих формул, а тем более их доказательств заняло немало страниц в истории геометрической науки. Многие выдающиеся ученые внесли свой вклад в развитие теории объемов, а популяризаторы математики — в упрощение и доступное изложение этой теории.

Основной целью данной главы является формирование представлений об объемах и площадях поверхностей, обоснование соответствующих формул для основных пространственных фигур. Вы научитесь использовать различные методы нахождения объемов, как строго геометрические, так и те, которые объединяют в себе геометрию и начала анализа. При изучении объемов тел полезно будет вспомнить и систематизировать материал о площадях фигур на плоскости. Подходы, которые применялись для получения основных формул площадей, будут надежным фундаментом для построения теории объемов.

В данной главе речь пойдет о всех основных фигурах, которые вы изучали в течение года, в частности о тесной связи многогранников и тел вращения. Это даст вам возможность, с одной стороны, вспомнить основные факты из курса геометрии, а с другой — на основании формул для площадей поверхностей многогранников получить соответствующие результаты для тел вращения.

Задачи данной главы содержат много геометрических конфигураций, что позволит вам переосмыслить весь курс стереометрии с точки зрения применения своих знаний на практике, в частности для нахождения, пожалуй, самых распространенных в жизни геометрических величин — объемов и площадей поверхностей. Ради этого бесценного опыта вы и изучали, в конце концов, геометрию в пространстве.

§ 15. ОБЪЕМ МНОГОГРАННИКОВ. ОБЪЕМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА, ПРИЗМЫ И ЦИЛИНДРА

15.1. Понятие объема многогранников

Понятие объема хорошо известно на уровне повседневного опыта: мы покупаем пакет сока определенного объема, рассчитываем, какой объем займет в квартире новая мебель, берем для приготовления блюда кастрюлю соответствующего объема. Придадим этим наглядным представлениям об объеме тела определенную математическую строгость.

Для дальнейших рассуждений полезно объединить практический опыт и известную уже теорию площадей многоугольников. По аналогии с ней мы и будем строить теорию объемов пространственных тел, в первую очередь многогранников.

Объем характеризует величину части пространства, которую занимает геометрическое тело, и измеряется, как и площадь, в определенных единицах. Единицей измерения площадей является площадь единичного квадрата, а за единицу измерения объема принимается объем единичного куба, то есть куба, ребро которого равно единице длины. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см, 1 дм или 1 м, то за единицу измерения объема принимается объем куба с ребром 1 мм, 1 см, 1 дм или 1 м. Соответствующая единица объема называется кубическим миллиметром (1 мм^3), кубическим сантиметром (1 см^3), кубическим дециметром или литром (1 дм^3 или 1 л), кубическим метром (1 м^3). Таким образом, вычисление объемов тел разной формы основано на сравнении с объемом единичного куба.

Измерить объем тела на практике можно, например, погрузив его в воду и подсчитав количество вытесненной телом воды. Но во многих случаях это не целесообразно, поэтому очень полезно вывести и научиться применять формулы для вычисления объемов. Соответствующая теория основана на аксиомах объема многогранников.

1. Равные многогранники имеют равные объемы.

2. Если многогранник составлен из нескольких многогранников, то его объем равен сумме объемов этих многогранников.

3. Объем куба с ребром, равным единице длины, равен единице объема.

Итак, ***объем многогранника*** — это положительная величина, числовое значение которой удовлетворяет аксиомам объема.

Как правило, объем обозначают буквой V.

Приведенные аксиомы имеют и практическую основу. Действительно, все пакеты, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда и одинаковые размеры, содержат одинаковое количество сока.

Тела, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

Если же каждый из двух пакетов можно разлить в одинаковое количество маленьких пакетиков, то сумма объемов этих пакетиков будет равна объему каждого из них, то есть данные пакеты имеют одинаковый объем.

Тела, составленные из одних и тех же многогранников, называются *равносоставленными*. Например, равносоставленными будут тела, изображенные на рисунке 190, *а*, *б*: прямая треугольная призма и прямой параллелепипед. Действительно, каждая из этих фигур составлена из двух одинаковых прямых призм, таких как на рисунке 190, *в*.

Очевидно, что объемы равносоставленных многогранников равны по второй аксиоме. Интересно, что обратное утверждение неверно (в отличие от аналогичной теоремы для площадей). Так, многогранники равного объема не всегда можно разбить на конечное число равных многогранников. В частности, куб и правильный тетраэдр равных объемов (рис. 190, *г*) не являются равносоставленными.

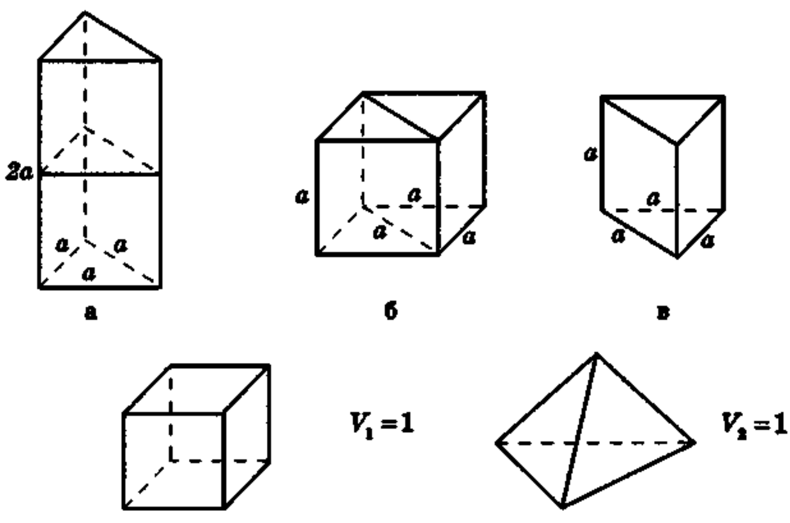


Рис. 190. Примеры равносоставленных и неравносоставленных тел

15.2. Объем параллелепипеда

Простейшей фигурой с точки зрения вычисления объема является прямоугольный параллелепипед.

Теорема (формула объема прямоугольного параллелепипеда)
Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:

$$V = abc,$$

где a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда.

Приведем рассуждения, на которых основано доказательство данной теоремы.

Сначала рассмотрим прямоугольный параллелепипед с измерениями a, 1, 1. Так как в отрезке a единица измерения длины помещается a раз, то единичный куб помещается в параллелепипед также a раз. Значит, объем прямоугольного параллелепипеда равен a (рис. 191, *а*).

Аналогично объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, 1 равен ab (рис. 191, *б*), а прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c — равен abc (рис. 191, *в*).

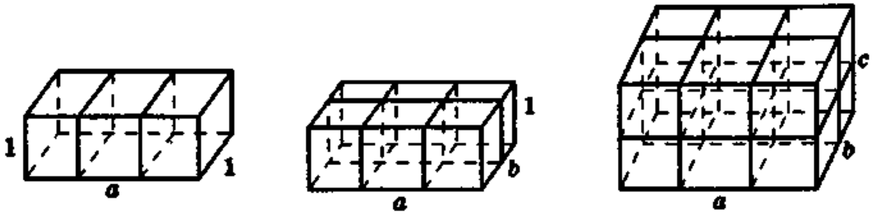
Полное доказательство данной теоремы приведено в Приложении 2.

Следствие (формула объема куба)
Объем куба равен кубу его ребра:

$$V = a^3,$$

где a — ребро куба.

Нам известно, что площадь прямоугольника равна произведению двух его измерений, а параллелограмма — произведению его стороны на проведенную к ней высоту. По аналогии нетрудно предположить, что объем произвольного параллелепипеда также можно найти через площадь основания и соответствующую высоту.



$V_1 = a$ $\quad$ $V_2 = ab$ $\quad$ $V_3 = abc$

а $\quad$ б $\quad$ в

Рис. 191. К обоснованию формулы объема прямоугольного параллелепипеда

Теорема (формула объема параллелепипеда)
Объем параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту:

$$V = S_{осн} \cdot h,$$

где $S_{осн}$ — площадь основания параллелепипеда, h — высота.

Доказательство

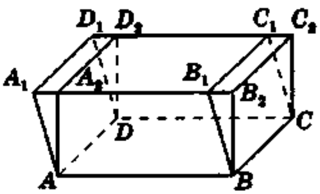


Рис. 192. К доказательству формулы объема параллелепипеда

□ Очевидно, что для прямоугольного параллелепипеда данная формула верна. Докажем ее для наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 192). Проведем через ребра BC и AD плоскости, перпендикулярные основанию $ABCD$. Дополним наклонный параллелепипед треугольной призмой $BB_1B_2CC_1C_2$ и отсечем треугольную призму $AA_1A_2DD_1D_2$. Эти призмы равны, так как совмещаются параллельным переносом на вектор $\overline{AB}$. Значит, полученный параллелепипед имеет тот же объем, что и исходный.

При описанном преобразовании параллелепипеда площадь его основания и высота сохраняются, а две боковые грани становятся перпендикулярными плоскости основания ABC. Если выполнить аналогичное преобразование с помощью плоскостей, проходящих через AB и DC перпендикулярно основанию $ABCD$, получим прямой параллелепипед с основанием $ABCD$, равновеликий исходному. При этом высоты параллелепипедов также сохраняются.

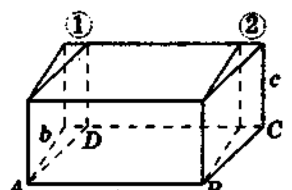


Рис. 193. Объемы прямого и прямоугольного параллелепипедов

Теперь проведем через точки A и B плоскости, перпендикулярные AB (рис. 193). Дополняя прямой параллелепипед одной треугольной призмой (*1*) и отсекая равную ей другую призму (*2*), получим прямоугольный параллелепипед, равновеликий предыдущему.

Объем полученного прямоугольного параллелепипеда равен abc. Так как при описанных выше преобразованиях данного параллелепипеда в прямоугольный каждый раз образуется параллелепипед, равновеликий предыдущему, а площадь основания и высота сохраняются, то и объем исходного параллелепипеда можно вычислить с помощью полученной формулы. Итак, объем наклонного параллелепипеда $V = abc = S_{ABCD} \cdot h$.

Таким образом, объем произвольного параллелепипеда вычисляется по формуле $V = S_{осн} \cdot h$.

Теорема доказана. ■

Задача

В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Боковое ребро параллелепипеда равно 6 см. Найдите объем данного параллелепипеда, если две его боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 30°.

Решение

Пусть дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 194), в основании которого лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами 3 см и 4 см. Боковые ребра параллелепипеда равны и имеют длину 6 см. Противолежащие боковые грани параллелепипеда параллельны, следовательно, наклонены к плоскости его основания под равными углами.

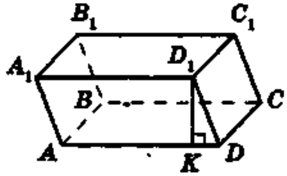


Рис. 194

Пусть грани AA_1D_1D и BB_1C_1C перпендикулярны грани $ABCD$, а грани AA_1B_1B и DD_1C_1C образуют с $ABCD$ угол 30°. Проведем в плоскости AA_1D_1 перпендикуляр D_1K к AD. По свойству перпендикулярных плоскостей $D_1K \perp (ABC)$, следовательно, D_1K — высота данного параллелепипеда. Так как D_1K является перпендикуляром, D_1D — наклонной, KD — ее проекцией на плоскость ABC, причем $KD \perp CD$, то по теореме о трех перпендикулярах $D_1D \perp CD$. Значит, угол D_1DK равен углу между плоскостями DD_1C_1 и ABC. По условию $\angle D_1DK = 30°$. Из прямоугольного треугольника D_1KD получим: $D_1K = D_1D \cdot \sin 30° = 3$ см.

Таким образом,

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{осн} \cdot h = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36 \quad (см^3).$$

Ответ: 36 см³.

15.3. Объем призмы

На плоскости для получения формулы площади треугольника было удобно дополнить треугольник до параллелограмма. Далее, для получения формулы площадей других многоугольников, целесообразно было разбить их на треугольники. Применим аналогичные приемы для вывода формулы объема призмы.

Теорема (формула объема призмы)

Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h,$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы, h — ее высота.

Доказательство

□ Пусть дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Дополним ее до параллелепипеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$, как показано на рисунке 195. Дополняющая призма симметрична данной относительно центра симметрии параллелепипеда точки O. Значит, она равна данной призме. Тогда, по аксиомам объема, объем параллелепипеда равен удвоенному объему данной призмы. Но $V_{ABDCA_1B_1D_1C_1} = S_{ABDC} \cdot h = 2 \cdot S_{ABC} \cdot h$, значит, $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot h$.

Применим только что выведенную формулу объема треугольной призмы к рассмотрению произвольной призмы.

Разобьем основание призмы на треугольники, а призму — на соответствующие треугольные призмы с высотой h (рис. 196).

По аксиоме, объем данной призмы равен сумме объемов составляющих ее треугольных призм:

$$V = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h + \ldots + S_n \cdot h = \left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) \cdot h = S_{\text{осн}} \cdot h,$$

где S_1, S_2, ..., S_n — площади треугольников, на которые разбито основание призмы.

Теорема доказана. ■

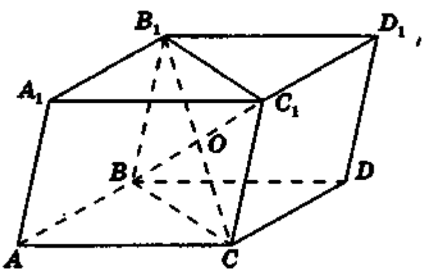


Рис. 195. К доказательству формулы объема треугольной призмы

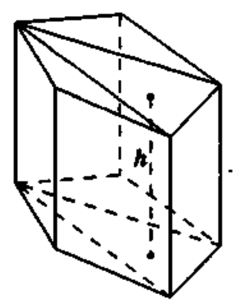


Рис. 196. К доказательству формулы объема призмы

Опорная задача

Объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь перпендикулярного ему сечения: $V = S_\perp \cdot l$, где l — боковое ребро призмы, $S_\perp$ — площадь перпендикулярного ему сечения. Докажите.

Решение

Рассмотрим наклонную призму F_1 с ребром $AA_1 = l$ (рис. 197). Проведем два ее перпендикулярных сечения, расстояние между плоскостями которых l и которые не имеют с данной призмой общих точек. При этом получим прямую призму F_2 и многогранник F_3 (рис. 197). Многогранник, составленный из F_1 и F_3, и многогранник, составленный из F_3 и F_2, равны, так как совмещаются параллельным переносом на вектор $\overline{AA_1}$. Поэтому их объемы равны. Эти многогранники имеют общую часть F_3. Отсюда по аксиоме объема следует, что объемы призм F_1 и F_2 также равны. Но последняя призма является прямой, и ее объем равен $S_{осн} \cdot l$. Значит, объем данной призмы равен $V = S_\perp \cdot l$.

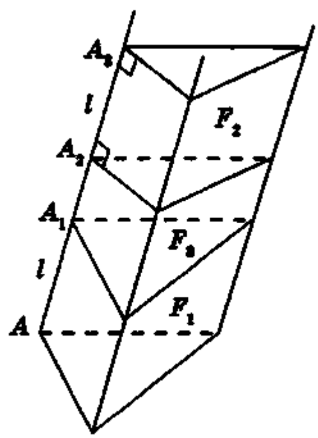


Рис. 197. К нахождению объема наклонной призмы

15.4. Объем цилиндра

При обосновании формулы площади круга в планиметрии мы использовали вписанные в окружности и описанные около них многоугольники. Применим аналогичные рассуждения и в пространстве, заменив круг на цилиндр, а многоугольники — на призмы. Дадим соответствующие определения.

Определение

Прямая призма называется **вписанной в цилиндр**, если ее основания вписаны в основания цилиндра.

При этом цилиндр называется описанным около призмы. Очевидно, что боковые ребра призмы — образующие цилиндра, а высоты прямой призмы и описанного около нее цилиндра равны (рис. 198).

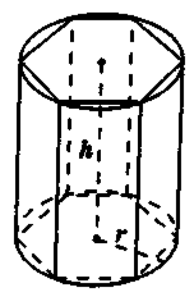


Рис. 198. Призма, вписанная в цилиндр

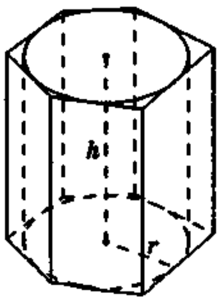


Рис. 199. Призма, описанная около цилиндра

Определение

Прямая призма называется **описанной около цилиндра**, если ее основания описаны около оснований цилиндра.

При этом цилиндр называется вписанным в призму (рис. 199). Очевидно, что высоты прямой призмы и вписанного в нее цилиндра равны.

Теорема (формула объема цилиндра)

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$$V = S_{осн} \cdot h = \pi R^2 h,$$

где $S_{осн}$ — площадь основания цилиндра, h — высота, R — радиус цилиндра.

Доказательство

□ Впишем в данный цилиндр радиуса R и высоты h правильную n-угольную призму с площадью основания S'_n и опишем около него правильную n-угольную призму с площадью основания S''_n (рис. 200). Тогда, по доказанному при обосновании формулы для площади круга, $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \lim\limits_{n\to\infty} S''_n = \pi R^2$.

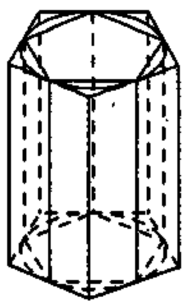


Рис. 200. К доказательству формулы объема цилиндра

Отсюда следует, что при неограниченном возрастании n объемы вписанных призм $S'_n \cdot h$ и объемы описанных призм $S''_n \cdot h$ стремятся к величине $\pi R^2 h$. Значит, существуют призмы, содержащиеся в данном цилиндре, и призмы, содержащие его, объемы которых сколь угодно мало отличаются от $\pi R^2 h$. Тогда объем цилиндра выражается формулой $V = \pi R^2 h$.

Теорема доказана. ■

Задача

Основание прямой призмы — треугольник со стороной c и прилежащими к ней углами α и β. Диагональ грани, содержащей сторону c, образует с плоскостью основания призмы угол φ. Найдите объем цилиндра, описанного около призмы.

Решение

Пусть дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит треугольник ABC ($AB=c$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$). Так как $B_1B\perp(ABC)$, то AB_1 — наклонная, AB — ее проекция на плоскость ABC. Значит, по определению угол B_1AB равен углу между AB и плоскостью ABC. По условию $\angle B_1AB=\varphi$ (рис. 201).

Рассмотрим цилиндр, описанный около данной призмы. Его основания описаны около оснований призмы, высота равна высоте призмы.

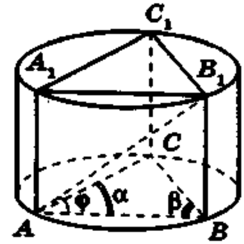


Рис. 201

По теореме синусов для треугольника ABC имеем:

$$R=\frac{AB}{2\sin\angle C}=\frac{c}{2\sin\left(180^\circ-(\alpha+\beta)\right)}=\frac{c}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

Из прямоугольного треугольника ABB_1: $BB_1=AB\cdot\operatorname{tg}\angle B_1AB=c\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

Следовательно, объем цилиндра равен:

$$V=\pi R^2h=\pi\cdot\left(\frac{c}{2\sin(\alpha+\beta)}\right)^2\cdot(c\cdot\operatorname{tg}\varphi)=\frac{\pi c^3\operatorname{tg}\varphi}{4\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi c^3\operatorname{tg}\varphi}{4\sin^2(\alpha+\beta)}$.

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

653. Какой высоты (в метрах) будет столбик, если кубический метр разрезать на кубические сантиметры и поставить их друг на друга?

654. Изменится ли объем прямоугольного параллелепипеда с квадратом в основании, если сторону квадрата уменьшить в 2 раза, а высоту увеличить в 4 раза? Если да, то увеличится или уменьшится объем и во сколько раз?

655. Изменится ли объем цилиндра, если его радиус увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 2 раза. Если да, то увеличится или уменьшится объем и во сколько раз?

656. Свинцовый цилиндр высотой 1 дм переплавили в цилиндр с радиусом, в 2 раза меньшим. Какой станет высота цилиндра?

657. Докажите, что из всех призм с общим основанием и боковыми ребрами одинаковой длины наибольший объем имеет прямая призма.

МОДЕЛИРУЕМ

658. Изготовьте из пластилина куб, правильную треугольную призму и цилиндр с одинаковыми высотами и объемами. Измерьте, какое из оснований имеет наибольшую площадь и какое наименьшую.

659. Изготовьте из плотной бумаги правильные треугольную и четырехугольную призмы, все ребра которых равны. Выполните соответствующие измерения и найдите отношение объемов этих призм.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

660*. Найдите объем куба, если:

а) его ребро равно 6 см;

б) его диагональ равна $5\sqrt{3}$ дм;

в) площадь его грани равна 49 см^2.

661. Емкость для льда имеет форму кубика. Найдите объем емкости, если лед, замороженный в ней, имеет массу 1,834 г, а плотность льда равна 917 кг/м^3.

662*. Найдите объем куба, если:

а) его ребро равно 0,2 м;

б) диагональ его грани равна $3\sqrt{2}$ дм.

663*. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если:

а) его измерения равны 4 см, 5 см и 8 см;

б) его длина равна 32 см, ширина 24 см, а диагональ 41 см;

в) стороны его основания равны a и b, а диагональ наклонена к основанию под углом α.

664. Стальной прямоугольный параллелепипед с измерениями 45 дм, 12 дм и 50 дм переплавлен в куб. Найдите длину ребра куба.

→ **665.*** Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если:
а) его измерения равны 3,2 см, 4 см и 0,5 см;
б) его длина равна 16 м, ширина 12 м, а диагональ грани 13 м;
в) стороны его основания равны 12 см и 16 см, а диагональ наклонена к основанию под углом 30°.

666.* Найдите объем прямого параллелепипеда, если:
а) его основанием является параллелограмм, стороны которого равны $3\sqrt{2}$ см и 7 см, острый угол 45°, а площадь меньшего диагонального сечения 20 см^2;
б) его основанием является ромб со стороной a и углом α, а площадь боковой грани равна S.

→ **667.** Найдите объем прямого параллелепипеда с ромбом в основании, острый угол которого равен 30°, а площадь основания равна площади боковой грани и составляет 18 см^2.

668. Запишите формулу объема правильной n-угольной призмы со стороной a и боковым ребром H для $n = 3, 4, 6$.

669. Периметр основания правильной треугольной призмы равен 12 см, а периметр боковой грани — 18 см. Найдите объем призмы.

→ **670.** Площадь основания правильной четырехугольной призмы равна 81 см^2, а площадь боковой грани — 36 см^2. Найдите объем призмы.

671.* Найдите объем прямой треугольной призмы, если:
а) ее высота равна 6 см, а основанием является прямоугольный треугольник с катетом 15 см и гипотенузой 17 см;
б) ребра ее основания равны 5 см, 5 см и 8 см, а диагональ большей боковой грани 10 см;
в) ее боковое ребро равно 3 см, два ребра основания равны $\sqrt{3}$ см и 4 см, а угол между ними 60°.

672. Объем прямой треугольной призмы равен 120 см^3, а ребра основания — 4 см, 13 см, 15 см. Найдите боковое ребро призмы.

673. Найдите объем прямой четырехугольной призмы с боковым ребром 5 см и трапецией в основании, диагонали которой взаимно перпендикулярны и равны 4 см и 7 см.

→ **674.** В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с высотой 4 см и боковой стороной 5 см. Найдите объем призмы, если диагональ наибольшей боковой грани равна 10 см.

675°. Найдите объем цилиндра, если:

а) радиус его основания равен 5 см, высота 3 см;

б) его осевое сечение — квадрат со стороной 4 см;

в) площадь его основания равна 9π см^2, высота равна диаметру.

→ **676°.** Найдите объем цилиндра, если:

а) диаметр его основания равен 8 см, высота 5 см;

б) площадь его осевого сечения равна 60 дм^2, площадь основания 25π дм^2.

677. Диаметр основания цилиндра равен d, а объем — V. Найдите площадь осевого сечения.

678. Поместятся ли 193 т бетона в цилиндрическую цистерну, диаметр которой равен 6 м, а высота — 3 м, если плотность бетона равна 2300 кг/м^3?

→ **679.** Угол между диагоналями осевого сечения цилиндра равен φ, а его диагональ — d. Найдите объем цилиндра. Сколько решений имеет задача?

Уровень Б

680. Найдите объем куба с диагональю d.

→ **681.** Найдите объем куба с площадью грани Q.

682. Если каждое ребро куба увеличить на 3 см, то его объем увеличится на 117 см^3. Найдите ребро куба.

→ **683.** Если каждое ребро куба уменьшить на 2 см, то его объем уменьшится на 98 см^3. Найдите ребро куба.

684. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагонали граней которого равны 5 см, 6 см и 7 см.

→ **685.** Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 70 см, а его измерения относятся как 3 : 2 : 6.

686. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 5 см и 8 см, а одна из диагоналей основания — 7 см. Найдите объем параллелепипеда, если его меньшая диагональ равна 25 см.

687. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб площадью S. Площади диагональных сечений равны S_1 и S_2. Найдите объем параллелепипеда.

→ **688.** Высота прямого параллелепипеда с ромбом в основании равна $2\sqrt{3}$ см, а диагонали наклонены к основанию под углами 45° и 60°. Найдите объем призмы.

689. Найдите объем наклонной призмы, в основании которой лежит треугольник со сторонами 6 см, 5 см и 5 см, а боковое ребро равно 4 см и наклонено к плоскости основания под углом 30°.

→ **690.** Основанием наклонного параллелепипеда является прямоугольник со сторонами 5 см и 8 см. Одно из боковых ребер равно 4 см и образует со смежными сторонами основания углы в 60°. Найдите объем параллелепипеда.

691. В основании наклонного параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 3 см, 7 см и диагональю 6 см. Диагональное сечение, проходящее через бóльшую диагональ параллелограмма, перпендикулярно плоскости основания, и его площадь равна 80 см². Найдите объем параллелепипеда.

→ **692.** Боковое ребро наклонной треугольной призмы равно 7 см, две боковые грани призмы взаимно перпендикулярны, а их площади равны 56 см² и 63 см². Найдите объем призмы.

693. В правильной шестиугольной призме площади двух граней равны $6\sqrt{3}$ см² и $24\sqrt{3}$ см². Найдите объем призмы. Сколько решений имеет задача?

→ **694.** В правильной шестиугольной призме сторона основания равна 3 см, а бóльшая диагональ наклонена к основанию под углом 30°. Найдите объем призмы.

695. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании и боковой стороной a. Диагональ боковой грани, содержащей основание треугольника, образует с плоскостью основания угол β. Найдите объем призмы.

→ **696.** Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с острым углом α и противолежащим катетом a. Площадь боковой грани, содержащей этот катет, равна S. Найдите объем призмы.

697. В основании прямой призмы лежит прямоугольная трапеция с острым углом α и диагональю d, которая является биссектрисой этого угла. Бóльшая диагональ призмы образует угол β с боковым ребром. Найдите объем призмы.

698. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с тупым углом α и диагональю d, которая является биссектрисой этого угла. Диагональ призмы образует с основанием угол β. Найдите объем призмы.

699. Найдите объем цилиндра с площадью основания S и площадью осевого сечения Q.

700. Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α. Диагональ сечения равна d и образует со второй диагональю угол φ. Найдите объем цилиндра. Сколько решений имеет задача?

701. В основании цилиндра проведена хорда, стягивающая дугу α. Отрезок, соединяющий центр другого основания с серединой этой хорды, равен m и образует с плоскостью основания угол β. Найдите объем цилиндра.

Уровень В

702. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 30 см^2, а площади боковых граней 5 см^2, 12 см^2 и 13 см^2. Найдите объем данной призмы.

703. Два цилиндра, осевые сечения которых — равные квадраты, пересекаются так, что образующая одного является осью другого. Найдите объем общей части этих цилиндров, если их образующая равна l.

704. В цилиндр вписана призма, основание которой — прямоугольник со сторонами a и b. Диагональ призмы наклонена к основанию под углом γ. Найдите объем цилиндра.

705. В цилиндр вписана призма, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Найдите объем цилиндра, если высота призмы равна H.

706. В призму, основанием которой является прямоугольная трапеция, вписан цилиндр с диаметром основания d и образующей l. Найдите объем призмы, если бо́льшая боковая сторона трапеции равна b.

707. В правильную треугольную призму вписан цилиндр с радиусом основания r и образующей l. Найдите объем призмы.

708. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму — цилиндр. Найдите отношение объемов цилиндров.

→ **709.** В правильную четырехугольную призму вписан цилиндр, а в цилиндр — правильная треугольная призма. Найдите отношение объемов призм.

710. В основании прямой призмы лежит ромб с тупым углом α. Сечение, проведенное через бо́льшую диагональ нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания, наклонено к основанию под углом β. Площадь этого сечения равна Q. Найдите объем цилиндра, вписанного в данную призму.

→ **711.** В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с углом α. Через противолежащий катет нижнего основания и вершину угла α верхнего основания проведено сечение, образующее с плоскостью осования угол β. Найдите объем цилиндра, описанного около данной призмы, если перпендикуляр, проведенный из вершины угла α нижнего основания к сечению, равен d.

Повторение перед изучением § 16

Теоретический материал

- свойства подобных фигур (9 класс)
- пирамида (11 класс, § 8)
- усеченная пирамида (11 класс, п. 10.2)
- конус (11 класс, § 13)
- шар и сфера (11 класс, § 14)

Задачи

712. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро наклонено к основанию под углом $60°$. Найдите угол, под которым наклонены к основанию боковые грани пирамиды.

713. Площадь основания конуса равна S, а угол при вершине осевого сечения — α. Найдите высоту конуса.

§ 16. ОБЪЕМЫ ПИРАМИДЫ, КОНУСА И ШАРА

16.1. Общая формула объема

Рассмотрим способ вычисления объемов тел, в основе которого лежит понятие интеграла, известное из курса алгебры и начал анализа.

Пусть тело T, объем которого требуется вычислить, расположено между двумя параллельными плоскостями α и β. Введем систему координат так, чтобы ось Ox была перпендикулярна плоскостям α и β (рис. 202). Пусть плоскость α задана уравнением $x=a$, а плоскость β — $x=b$ $(a<b)$.

Будем рассматривать случай, когда любое сечение тела $\Phi(x)$ плоскостью, перпендикулярной оси Ox и пересекающей эту ось в точке $(x;0;0)$, является кругом или многоугольником (такой случай возможен, если $\Phi(x)$ — точка).

Обозначим площадь фигуры $\Phi(x)$ через $S(x)$. Допустим, что $S(x)$ — непрерывная функция при $x\in[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных отрезков точками $a=x_0$, x_1, x_2, ..., $x_n=b$ и через точки с абсциссами x_i проведем плоскости, перпендикулярные оси Ox (рис. 203).

Эти плоскости разобьют тело T на n тел: T_1, T_2, ..., T_n. Если сечение $\Phi(x_i)$ — круг, то объем тела T_i приближенно равен объему цилиндра с основанием $\Phi(x_i)$ и высотой $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$. Если сечение $\Phi(x_i)$ — многоугольник, то объем тела T_i приближенно равен объему прямой призмы с основанием $\Phi(x_i)$ и высотой Δx_i.

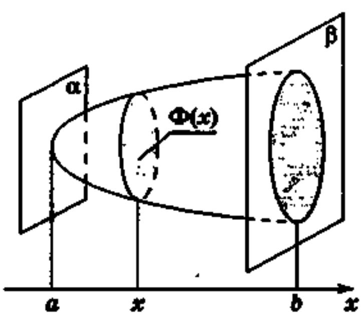


Рис. 202. К обоснованию общей формулы объема тела

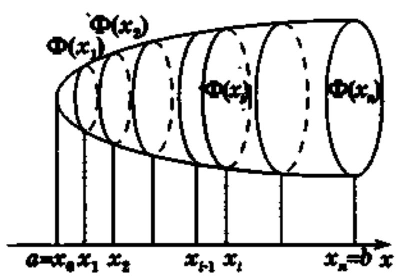


Рис. 203. Разбиение тела на n тел

Учитывая, что объем цилиндра и призмы равен произведению площади основания на высоту, то есть $V_{T_i} \approx S(x_i)\cdot\Delta x_i$, получаем:

$$V_T \approx S(x_1)\cdot\Delta x_1 + S(x_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + S(x_n)\cdot\Delta x_n.$$

При неограниченном возрастании n правая часть данной формулы приближается сколь угодно близко к объему тела T. С другой стороны, так как $S(x)$ непрерывна на $[a;b]$, это же выражение приближается к соответствующему интегралу. Итак, $V_T = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Таким образом, мы получили формулу для вычисления объема тела с помощью интеграла. Будем называть ее ***интегральной формулой объема***.

Из этой формулы вытекает интересное и удобное в применении следствие, формулировка которого принадлежит итальянскому математику Бонавентуре Кавальери.

Принцип Кавальери

Если при пересечении двух тел F_1 и F_2 плоскостями, параллельными одной и той же плоскости α, в сечениях получаются фигуры с равными площадями, то объемы данных тел равны.

Это утверждение легко вывести из интегральной формулы объема, если расположить систему координат так, чтобы ось Ox была перпендикулярна плоскости α (рис. 204). Применение интеграла и принципа Кавальери позволяет значительно упростить нахождение формул, выражающих объемы многих важных тел.

Рис. 204. К обоснованию принципа Кавальери

16.2. Объем пирамиды и конуса

В пунктах 15.3 и 15.4 мы установили, что объемы призмы и цилиндра определяются одной и той же формулой:

$$V = S_{осн}\cdot h.$$

Поэтому вполне естественно предположить, что будут совпадать формулы для объемов пирамиды и конуса.

Теорема (формула объема пирамиды)
Объем пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту:

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h,$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания пирамиды, h — высота.

Доказательство

☐ Разместим пирамиду в системе координат так, чтобы ось Ox была направлена вдоль высоты, а основание принадлежало бы плоскости yOz (рис. 205). Пусть некоторая плоскость параллельна основанию пирамиды и пересекает ее высоту в точке $(x;0;0)$. Обозначим через $S(x)$ площадь сечения пирамиды этой плоскостью. По доказанному в п. 10.2 она отсекает пирамиду, подобную данной. В частности, подобными являются многоугольники основания и сечения. Пусть k — коэффициент подобия. Тогда $\frac{S(x)}{S_{\text{осн}}}=k^2=\left(\frac{h-x}{h}\right)^2$. Отсюда $S(x)=\frac{(h-x)^2\cdot S_{\text{осн}}}{h^2}$.

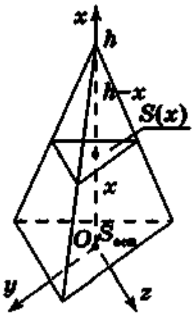


Рис. 205. К доказательству формулы объема пирамиды

Применяя теперь для пирамиды интегральную формулу объема, получим:

$$V=\int_0^h\frac{S_{\text{осн}}}{h^2}\cdot(h-x)^2\,dx=-\frac{S_{\text{осн}}}{h^2}\cdot\frac{(h-x)^3}{3}\Bigg|_0^h=$$

$$=\frac{S_{\text{осн}}}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h.$$

Теорема доказана. ■

Следствие (формула объема усеченной пирамиды)

Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле:

$$V=\frac{1}{3}h\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right),$$

где h — высота усеченной пирамиды, S_1 и S_2 — площади ее оснований.

Доказательство

□ **Дополним данную усеченную пирамиду до полной с высотой H (рис. 206). Тогда высота дополняющей пирамиды будет равна $H-h$. Из подобия полной и дополняющей пирамид, площади оснований которых равны S_1 и S_2 соответственно, получаем: $\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{H-h}{H}\right)^2$. Отсюда $1-\frac{h}{H}=\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$, $\frac{h}{H}=1-\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$,**

$$H=\frac{h}{1-\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}}=\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}.$$

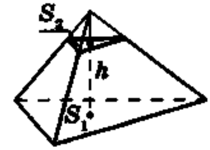


Рис. 206. К доказательству формулы объема усеченной пирамиды

По аксиомам объема, объем усеченной пирамиды равен разности объемов полной и дополняющей пирамид. Следовательно,

$$V=\frac{1}{3}S_1\cdot H-\frac{1}{3}S_2\cdot(H-h)=\frac{1}{3}\left(S_1\cdot\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}-S_2\left(\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}-h\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}h\frac{S_1\sqrt{S_1}-S_2\sqrt{S_1}+S_2\sqrt{S_1}-S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}=\frac{1}{3}h\frac{S_1\sqrt{S_1}-S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}=$$

$$=\frac{1}{3}h\frac{\left(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}\right)\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}=\frac{1}{3}h\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right).$$

Формула доказана. ■

Заметим, что при доказательстве теоремы об объеме пирамиды и ее следствия, кроме интегральной формулы объема, мы применили только тот факт, что плоскость, параллельная основанию, отсекает пирамиду, для площади основания $S(x)$ и высоты $h-x$ которой верна формула $\frac{S(x)}{S_{осн}}=\left(\frac{h-x}{h}\right)^2$.

Но эта формула, по доказанному в п. 13.2, также верна и для конуса (рис. 207). Поэтому аналогичными формулам объема и их доказательствам для пирамиды и усеченной пирамиды будут формулы объема и их доказательства для конуса и усеченного конуса.

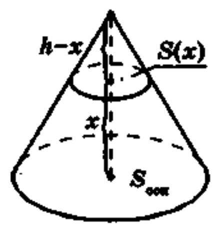


Рис. 207. К обоснованию формулы объема конуса

Теорема (формула объема конуса)

Объем конуса равен трети произведения площади основания на высоту:

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

где $S_{осн}$ — площадь основания конуса, R — радиус, h — высота.

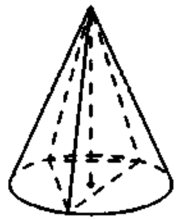


Рис. 208. Пирамида, вписанная в конус

Следствие (формула объема усеченного конуса)

Объем усеченного конуса вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{3}h\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)=\frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2+R_2^2+R_1R_2\right),$$

где h – высота усеченного конуса, S_1 и S_2 – площади его оснований, R_1 и R_2 – радиусы его оснований.

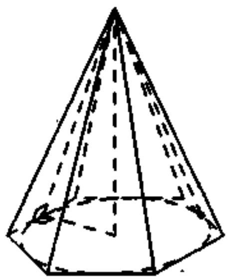


Рис. 209. Пирамида, описанная около конуса

С помощью вписанных и описанных призм мы вывели формулу для объема цилиндра. Подобную связь можно установить также для конусов и пирамид.

Определение

Пирамида называется **вписанной в конус**, если их вершины совпадают, а основание пирамиды вписано в основание конуса.

При этом конус называется описанным около пирамиды.

Очевидно, что высоты пирамиды и описанного конуса равны, а боковые ребра пирамиды являются образующими конуса (рис. 208).

Определение

Пирамида называется **описанной около конуса**, если их вершины совпадают, а основание пирамиды описано около основания конуса.

При этом конус называется вписанным в пирамиду.

Очевидно, что высоты пирамиды и вписанного конуса равны, а высоты боковых граней пирамиды являются образующими конуса (рис. 209).

Рис. 210. К обоснованию формулы объема конуса с помощью пирамид

Рассмотрим правильные n-угольные пирамиды, вписанные в данный конус, и правильные n-угольные пирамиды, описанные около него (рис. 210).

Если число n сторон оснований этих пирамид неограниченно возрастает, то площади их оснований стремятся к площади круга, лежащего в основании конуса. Следовательно, их объемы стремятся к $\frac{1}{3}\pi R^2 h$. Тогда существуют вписанные в конус и описанные около него пирамиды с объемами, сколь угодно мало отличающимися от $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Из этих рассуждений становится понятным другое обоснование формулы объема конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

16.3. Объем шара и его частей

Непосредственно получить только из геометрических рассуждений формулу для объема шара очень сложно. Но с помощью интегральной формулы объема и принципа Кавальери доказательство соответствующих результатов является простым и наглядным.

Теорема (формула объема шара)

Объем шара радиуса R вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Доказательство

☐ Найдем сначала объем полушара, применив принцип Кавальери.

Пусть дан полушар F_1 радиуса R. На плоскость α, содержащую основание полушара, поставим цилиндр, радиус и высота которого также равны R. В цилиндр впишем конус, вершина которого совпадает с центром основания цилиндра в плоскости α, а основание — с другим основанием цилиндра (рис. 211).

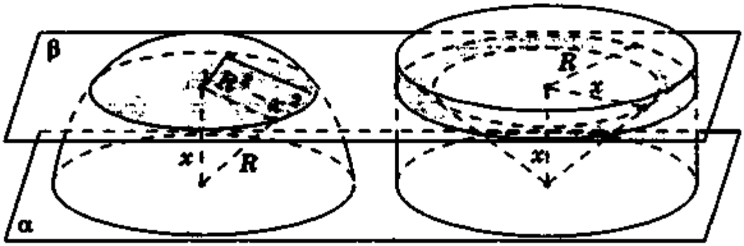


Рис. 211. К доказательству формулы объема шара

Сравним объем V_1 полушара F_1 с объемом V_2 тела F_2, ограниченного нижним основанием цилиндра и боковыми поверхностями цилиндра и конуса.

Проведем плоскость β, параллельную плоскости α и удаленную от нее на расстояние x ($0 \le x \le R$). Эта плоскость пересечет данный полушар по кругу радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$ и площади $\pi \cdot \left(R^2 - x^2\right)$, а тело F_2 — по кольцу. Так как осевое сечение конуса является равнобедренным прямоугольным треугольником, внешний радиус кольца равен R, а внутренний — x. Значит, площадь полученного кольца составит $\pi \cdot \left(R^2 - x^2\right)$ и будет равна площади сечения полушара. По принципу Кавальери, объем полушара равен объему тела F_2, то есть разности объемов цилиндра и конуса: $\pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3$. Объем шара вдвое больше объема полушара, следовательно, вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Теорема доказана. ■

Задача

Сечение шара, удаленное от его центра на 1 см, имеет площадь 8π см^2. Найдите объем шара.

Решение

Пусть дан шар с центром O. Сечение шара некоторой плоскостью α является кругом с центром O_1, причем $OO_1 \perp \alpha$. Так как O удалена от α на 1 см, то $OO_1 = 1$ см.

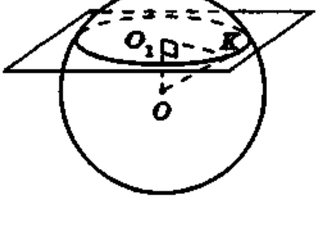


Рис. 212

Пусть точка K сферы, ограничивающей шар, принадлежит данному сечению (рис. 212). Тогда площадь сечения равна $\pi \cdot O_1K^2 = 8\pi$, откуда $O_1K = 2\sqrt{2}$ (см). Из прямоугольного треугольника OO_1K по теореме Пифагора имеем:

$$R = OK = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = 3 \text{ (см)}.$$

По формуле объема шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 27 = 36\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: 36π см^3.

Найдем теперь объемы частей шара.

Определение

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него некоторой плоскостью.

На рисунке 213 плоскость сечения, проходящая через точку B, разделяет шар на два шаровых сегмента. Круг, получившийся в сечении, называется ***основанием*** этих сегментов, а длины отрезков диаметра, перпендикулярного плоскости сечения, — ***высотами*** сегментов. Так, на рисунке 213 $AB = H_1$ — высота меньшего сегмента, $BC = H_2$ — высота бо́льшего сегмента.

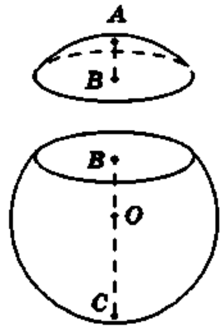


Рис. 213. Шаровые сегменты

Теорема (формула объема шарового сегмента)

Объем шарового сегмента вычисляется по формуле

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right),$$

где R — радиус шара, H — высота сегмента.

Доказательство

□ Применим для шарового сегмента интегральную формулу объема.

Введем декартову систему координат так, чтобы ее начало совпадало с центром шара.

Тогда часть шара, ограниченная плоскостями $x = R - H$ и $x = R$, является шаровым сегментом с высотой H (рис. 214).

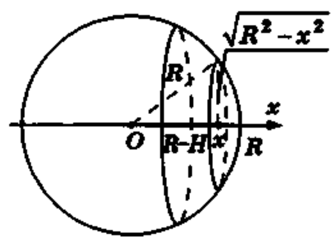


Рис. 214. К доказательству формулы объема шарового сегмента

Радиус сечения шарового сегмента плоскостью, пересекающей ось Ox в точке $(x;0;0)$, равен $\sqrt{R^2 - x^2}$. Следовательно, площадь этого сечения $S(x) = \pi\left(R^2 - x^2\right)$.

По интегральной формуле объема для шарового сегмента получаем:

$$V=\int_{R-H}^{R}\left(\pi\left(R^2-x^2\right)\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R}=$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3}R^3-R^2(R-H)+\frac{(R-H)^3}{3}\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3}R^3-R^3+R^2H+\frac{1}{3}\left(R^3-3R^2H+3RH^2-H^3\right)\right)=\frac{\pi}{3}\left(3RH^2-H^3\right)=$$

$$=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

Теорема доказана. ■

Заметим, что при $H=2R$ из только что доказанной формулы следует еще один способ нахождения формулы объема шара:

$$V=\pi(2R)^2\left(R-\frac{2R}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

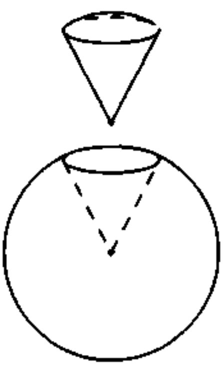


Рис. 215. Шаровые секторы

Определение

Шаровым сектором называется тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, основанием которого является основание сегмента, а вершиной — центр шара.

Очевидно, что если шаровой сегмент меньше полушара, его дополняют конусом для получения шарового сектора; если же шаровой сегмент больше полушара, то для получения шарового сектора конус из него удаляют (рис. 215).

Теорема (формула объема шарового сектора)
Объем шарового сектора вычисляется по формуле

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2H,$$

где R — радиус шара, H — высота соответствующего шарового сегмента.

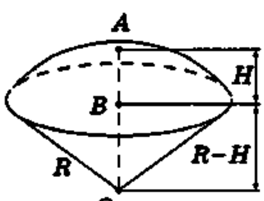


Рис. 216. К доказательству формулы объема шарового сектора

Доказательство

□ Рассмотрим случай шарового сектора, высота H соответствующего шарового сегмента для которого меньше R (рис. 216).

Тогда его объем равен сумме объема сегмента V_1 и объема конуса V_2. Следовательно,

$$V = V_1 + V_2 = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - (R-H)^2\right)(R-H) =$$

$$= \pi\left(H^2\left(R - \frac{H}{3}\right) + \frac{1}{3}H(2R-H)(R-H)\right) =$$

$$= \pi\left(H^2R - \frac{H^3}{3} + \frac{2R^2H}{3} - \frac{2RH^2}{3} - \frac{H^2R}{3} + \frac{H^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^2H.$$

Случай, когда высота H больше или равна R, рассмотрите самостоятельно.

Теорема доказана. ■

Определение

Шаровым слоем (поясом) называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями.

Расстояние между этими плоскостями называется *высотой шарового слоя*, а сечения, ограничивающие слой,— *основаниями шарового слоя* (рис. 217).

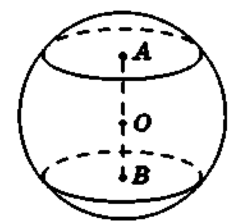


Рис. 217. Шаровой слой (пояс)

Заметим, что объем шарового слоя можно вычислить двумя способами:

1) как разность объемов двух шаровых сегментов;

2) как разность объема шара и объемов двух сегментов, не входящих в слой.

16.4. Объемы подобных тел

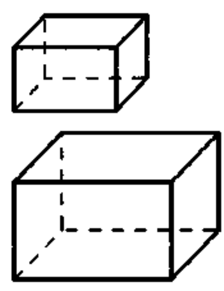
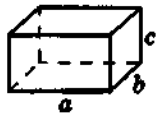
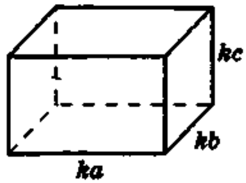
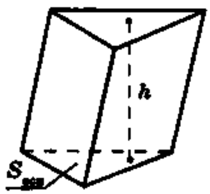
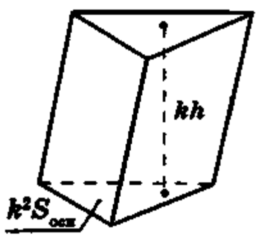
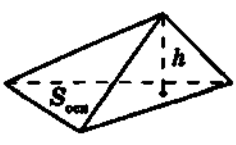
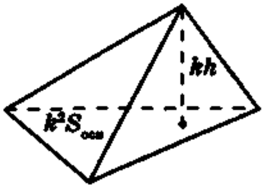


Рис. 218. Сравнение объемов подобных тел

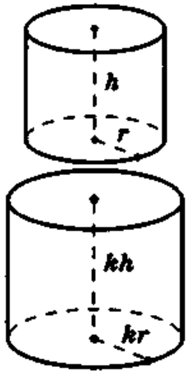
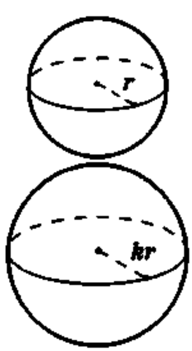
Из повседневного опыта нам хорошо известно, что при увеличении размеров предмета его объем также увеличивается. Например, легко сравнить объемы двух аквариумов, размеры одного из которых вдвое меньше соответствующих размеров другого (рис. 218): объемы отличаются в 8 раз.

Кроме того, можно проследить за подобными с коэффициентом k многоугольниками на

плоскости. Как известно, их периметры отличаются в k раз, площади — в k^2 раз. Естественно предположить, что *объемы подобных с коэффициентом k пространственных тел отличаются в k^3 раз.* Проверим это для тел, формулы объема которых нам уже известны.

Прямоугольный параллелепипед	 	$V_1 = abc$ $V_2 = (ka)\cdot(kb)\cdot(kc) = k^3(abc)$ $V_2 = k^3 \cdot V_1$
Призма	 	$V_1 = S_{осн} \cdot h$ $V_2 = \left(k^2 S_{осн}\right)\cdot(kh) = k^3\left(S_{осн}\cdot h\right)$ $V_2 = k^3 \cdot V_1$
Пирамида	 	$V_1 = \dfrac{1}{3} S_{осн} \cdot h$ $V_2 = \dfrac{1}{3}\left(k^2 S_{осн}\right)\cdot(kh) = k^3\left(\dfrac{1}{3} S_{осн}\cdot h\right)$ $V_2 = k^3 \cdot V_1$

Окончание таблицы

Цилиндр		$V_1=\pi r^2h$ $V_2=\pi(kr)^2\cdot(kh)=k^3\cdot\left(\pi r^2h\right)$ $V_2=k^3\cdot V_1$
Конус		$V_1=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$ $V_2=\dfrac{1}{3}\pi(kr)^2\cdot(kh)=k^3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\pi r^2h\right)$ $V_2=k^3\cdot V_1$
Шар		$V_1=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ $V_2=\dfrac{4}{3}\pi(kr)^3=k^3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)$ $V_2=k^3\cdot V_1$

Итак, для всех рассмотренных тел верно следующее утверждение: объемы тел, подобных с коэффициентом k, относятся как k^3.

Этот факт верен и для любых *простых тел*, то есть тел, которые можно разбить на конечное число треугольных пирамид. В частности, *любые многогранники, подобные с коэффициентом k, имеют объемы, которые отличаются в k^3 раз.*

Задача

Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объем пирамиды?

Решение

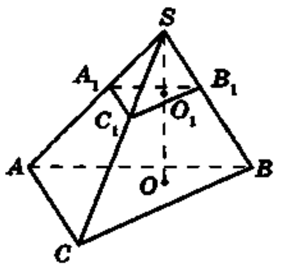


Рис. 219

Пусть дана пирамида с вершиной S и высотой SO. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, пересекает SO в точке O_1 (рис. 219). По условию $\frac{SO_1}{SO}=\frac{1}{2}$. Но отсекаемая пирамида подобна данной, причем отношение их высот равно коэффициенту подобия, то есть $k=\frac{1}{2}$. По свойству объемов подобных тел объем отсекаемой пирамиды в 8 раз меньше объема данной пирамиды. Следовательно, данная плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее объем в отношении 1:7.

Ответ: 1:7.

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

714. Как изменится объем правильной пирамиды, если:

а) ее высоту увеличить в 3 раза, а сторону основания уменьшить в 3 раза;

б) ее высоту уменьшить в 2 раза, а сторону основания увеличить в 2 раза?

715. Найдите отношение объемов двух конусов, если:

а) их радиусы равны, а высоты относятся как 1:3;

б) их высоты равны, а радиусы относятся как 1:3.

716. Отношение объемов двух шаров равно 8. Как относятся их диаметры?

717. Сколько нужно взять пластилиновых шариков радиуса 2 см, чтобы сделать один шарик радиуса 6 см?

МОДЕЛИРУЕМ

718. Из бумаги вырежьте круговой сектор с центральным углом 300° и радиусом 5 см. Используя этот сектор, изготовьте модель конуса. Найдите объем полученного конуса.

→ **719.** Уменьшите размеры пирамиды Хеопса в 1000 раз и смоделируйте ее аналог из картона. Найдите объем модели.

720. Возьмите 10 тетрадей и смоделируйте из них прямоугольный параллелепипед. Потом слегка раздвиньте полученную пачку. Сравните объемы исходной и полученной фигур. Сделайте выводы на основании аксиом объема и принципа Кавальери.

721. Сравните объемы мягкой (съедобной) части толстокожего апельсина и его кожуры.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

722°. Найдите объем пирамиды с высотой 10 см, если основанием пирамиды является:

а) треугольник со сторонами 3 см и 8 см и углом 30° между ними;

б) ромб с диагоналями 6 дм и 8 дм;

в) трапеция с основаниями 8 см и 12 см и высотой 9 см.

→ **723°.** Найдите объем пирамиды с высотой 8 см, если основанием пирамиды является:

а) параллелограмм со сторонами 5 см и 12 см и углом 150°;

б) треугольник со сторонами 4 см, 51 см и 53 см;

в) прямоугольник с диагональю 15 дм и отношением сторон 3:4.

724. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если:

а) ее апофема равна a, а двугранный угол при основании равен α;

б) угол между ее боковым ребром и основанием равен β, а радиус окружности, описанной около основания, равен R.

725. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если:

а) ее высота равна h, а апофема равна a;

б) ее боковое ребро равно l, а плоский угол при вершине равен φ.

→ **726.** Высота пирамиды равна h, а боковое ребро наклонено к основанию под углом α. Найдите объем:

а) правильной четырехугольной пирамиды;

б) правильной треугольной пирамиды.

727. В основании пирамиды лежит прямоугольник с диагональю 30 см и углом между диагоналями 60°. Все боковые ребра наклонены к основанию под углом 30°. Надите объем пирамиды.

→ **728.** В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 3 см, 4 см и 5 см. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

729. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием 10 см, периметр которого равен 36 см. Все боковые грани наклонены к основанию под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

→ **730.** В основании пирамиды лежит ромб со стороной 4 см и тупым углом 120°. Каждый двугранный угол при основании пирамиды равен 60°. Найдите объем пирамиды.

731. Высота усеченной пирамиды равна 6 см, объем равен 28 см^3, а площадь одного из оснований — 8 см^2. Найдите площадь другого основания.

→ **732.** Найдите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, площади оснований которой равны 4 см^2 и 16 см^2, а апофема равна $\sqrt{10}$ см.

733*. Найдите объем конуса, если:

а) его высота равна 6 см, а радиус 2 см;

б) его образующая равна 13 см, а диаметр 10 см;

в) его образующая равна $3\sqrt{2}$ см, а угол между образующей и основанием конуса 45°.

734*. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 6 см, а образующая — 5 см. Найдите объем конуса.

→ **735*.** Диаметры оснований усеченного конуса равны 12 см и 18 см, а объем — 399π см^3. Найдите высоту конуса.

736. Площадь осевого сечения конуса равна Q, а объем — V. Найдите радиус конуса.

→ **737.** Площадь основания конуса равна S, а объем — V. Найдите высоту конуса.

738°. Найдите объем шара, если:

а) его радиус равен 3 см;

б) его диаметр равен 12 см;

в) площадь его большого круга равна 4π см^2.

→ **739.** Найдите радиус шара, который переплавили из металлического куба с ребром 2 см.

Уровень Б

740. В правильной четырехугольной пирамиде высота образует с боковым ребром угол α. Расстояние от середины высоты до бокового ребра равно d. Найдите объем пирамиды.

→ **741.** В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол β. Найдите объем пирамиды, если расстояние между серединой высоты и серединой бокового ребра равно m.

742. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро образует с высотой угол α, а расстояние от основания высоты до бокового ребра равно a. Найдите объем пирамиды.

→ **743.** В правильной треугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол β, а расстояние от основания высоты до середины бокового ребра равно d. Найдите объем пирамиды.

744. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите объем пирамиды.

→ **745.** В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием b и углом β при вершине. Все боковые ребра образуют с высотой угол α. Найдите объем пирамиды.

746. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с боковой стороной c и острым углом α. Диагональ трапеции является биссектрисой острого угла. Найдите объем пирамиды, если все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом γ.

747. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании и радиусом вписанной окружности r. Найдите объем пирамиды, если все двугранные углы при основании равны γ.

→ **748.** Основанием пирамиды является ромб с острым углом β. Все высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны h и наклонены к плоскости ее основания под углом γ. Найдите объем пирамиды.

749. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании и радиусом вписанной окружности r. Две неравные боковые грани перпендикулярны основанию, а третья — наклонена к нему под углом φ. Найдите объем пирамиды.

→ **750.** В основании пирамиды лежит квадрат. Две смежные боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие — наклонены к нему под углом γ. Найдите объем пирамиды, если наименьшее боковое ребро пирамиды равно a.

751. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Боковая грань, содержащая этот катет, перпендикулярна основанию, а две другие — наклонены к нему под углом β. Найдите объем пирамиды.

→ **752.** В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом β при вершине. Боковая грань, содержащая основание треугольника, перпендикулярна основанию, а две другие — наклонены к нему под углом γ. Найдите объем пирамиды.

753. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны a и b $(a>b)$, а боковое ребро наклонено к большему основанию под углом φ. Найдите объем пирамиды.

→ **754.** Сторона одного из оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 3 см, высота — 15 см, а объем — 185 см^3. Найдите сторону другого основания.

755. Через две образующие конуса, угол между которыми равен 120°, проведено сечение. Площадь сечения равна $4\sqrt{3}$ см^2. Найдите объем конуса, если угол между высотой и образующей равен 60°.

→ **756.** Через вершину конуса проведена плоскость под углом 45° к основанию. Плоскость пересекает основание конуса по хорде, равной радиусу основания конуса и удаленной от его центра на 3 см. Найдите объем конуса.

757. Равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h, проведенной к основанию, вращается вокруг основания. Найдите объем фигуры вращения.

→ **758.** Равносторонний треугольник со стороной a вращается вокруг стороны. Найдите объем фигуры вращения.

759. Объем усеченного конуса равен 31π см^3, а образующая — радиусу большего основания. Найдите радиусы оснований конуса, если отношение высоты к образующей равно 3:5.

→ **760.** Площадь осевого сечения усеченного конуса равна 42 см^2. Найдите радиусы оснований конуса, если его объем равен 78π см^3, а высота — 6 см.

761. Найдите объем шара, если площадь сечения, удаленного от центра шара на расстояние d, равна S.

→ **762.** Сечение шара плоскостью имеет диаметр 24 см. На каком расстоянии от центра шара проходит плоскость сечения, если объем шара равен 4500π см^3?

763. В шаре проведены две плоскости перпендикулярно диаметру. Найдите объем каждой части шара, если диаметр шара равен 18 см, а плоскости делят диаметр на три равные части.

764. Определите объем меньшего шарового сектора шара радиуса R, если угол осевого сечения сектора равен α.

→ **765.** Шар разрезали на две части. Плоскость сечения проходит на расстоянии 12 см от центра шара. Найдите объем каждой части, если объем шара равен 4500π см^3.

Уровень В

766. В правильной треугольной пирамиде апофема образует с боковым ребром угол β. Найдите объем пирамиды, если радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен r.

767. Найдите объем правильной треугольной пирамиды с боковым ребром l и плоским углом при вершине α.

→ **768.** Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой h и плоским углом при вершине α.

769. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен β. Найдите объем пирамиды, если ее боковое ребро равно b.

→ **770.** В правильной четырехугольной пирамиде отрезок, соединяющий основание ее высоты с серединой бокового ребра, наклонен к плоскости основания под углом α. Найдите объем пирамиды, если ее апофема равна b.

771. В основании пирамиды лежит остроугольный треугольник с углами α и β. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом γ. Расстояние от основания высоты пирамиды до общей стороны заданных углов треугольника равно l. Найдите объем конуса, описанного около данной пирамиды.

→ **772.** В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при вершине. Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ. Найдите объем конуса, вписанного в данную пирамиду.

773. Объемы тел, полученных при вращении прямоугольного треугольника вокруг катетов и гипотенузы, равны V_a, V_b и V_c соответственно. Докажите, что $\frac{1}{V_c^2}=\frac{1}{V_a^2}+\frac{1}{V_b^2}$.

774. В правильной треугольной пирамиде расстояние от основания высоты до боковой грани равно c. Найдите объем пирамиды, если боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом γ.

Повторение перед изучением § 17

Теоретический материал

- длина окружности (9 класс)
- призмы, описанные около цилиндра (11 класс, п. 15.4)
- пирамида, описанная около конуса (11 класс, п. 16.2)
- шаровые сегмент и пояс (11 класс, п. 16.3)

Задачи

775. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, диагональ которого равна 41 см. Высота цилиндра равна 9 см, а радиус основания — 25 см. На каком расстоянии от оси проведено это сечение?

776. Через две образующие конуса проведена плоскость, пересекающая основание конуса по хорде длиной 4 см. Хорду видно из центра основания под углом 60°. Площадь полученного сечения равна 8 см^2. Вычислите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса.

§ 17. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

17.1. Понятие площади поверхности. Площадь поверхности цилиндра

✹ Под площадью поверхности многогранника мы понимаем сумму площадей всех его граней. Как же определить площадь поверхности тела, не являющегося многогранником? На практике это делают так. Разбивают поверхность на такие части, которые уже мало отличаются от плоских. Тогда находят площади этих частей, как будто они являются плоскими. Сумма полученных площадей является приближенной площадью поверхности. Например, площадь крыши здания определяется как сумма площадей кусков листового металла. Еще лучше это видно на примере Земли. Приблизительно она имеет форму шара. Но площади небольших ее участков измеряют так, как будто эти участки являются плоскими. Более того, под ***площадью поверхности тела*** будем понимать предел площадей полных поверхностей описанных около него многогранников. При этом должно выполняться условие, при котором все точки поверхности этих многогранников становятся сколь угодно близкими к поверхности данного тела. Для конкретных тел вращения понятие описанного многогранника будет уточнено.

Рассмотрим периметры P_n и площади S_n правильных n-угольников, описанных около круга радиуса R. При доказательстве формул для площади круга и длины окружности было получено, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi R^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 2\pi R$.

Применим данные соотношения к обоснованию формулы для площади боковой поверхности цилиндра.

При вычислении объема цилиндра были использованы правильные вписанные в него призмы. Найдем при помощи в чем-то аналогичных рассуждений площадь боковой поверхности цилиндра.

Опишем около данного цилиндра радиуса R и высоты h правильную n-угольную призму (рис. 220).

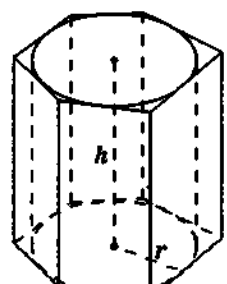


Рис. 220. К обоснованию формулы площади боковой поверхности цилиндра

Площадь боковой поверхности призмы равна

$$S_{\text{бок. пр}_n} = P_{\text{осн}_n} \cdot h,$$

где $P_{\text{осн}_n}$ — периметр основания призмы.

При неограниченном возрастании n получим:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{\text{бок. пр}_n} = \lim_{n\to\infty} P_{\text{осн}_n} \cdot h = 2\pi Rh,$$

так как периметры оснований призмы стремятся к длине окружности основания цилиндра, то есть к $2\pi R$.

Учитывая, что сумма площадей двух оснований призмы стремится к $2\pi R^2$, получаем, что площадь полной поверхности цилиндра равна $S + 2\pi R^2$. Но сумма площадей двух оснований цилиндра равна $2\pi R^2$. Поэтому найденную величину S принимают за площадь боковой поверхности цилиндра.

Итак, площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh,$$

где R — радиус цилиндра, h — его высота.

Заметим, что эта формула аналогична соответствующей формуле площади боковой поверхности прямой призмы $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h$.

За площадь полной поверхности цилиндра принимается сумма площадей боковой поверхности и двух оснований:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(R+h).$$

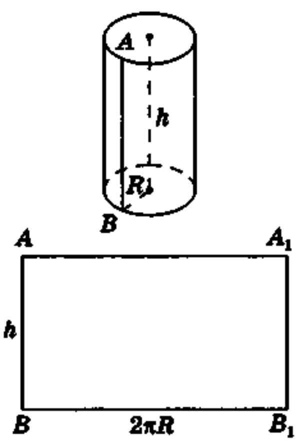


Рис. 221. Развертка боковой поверхности цилиндра

Если боковую поверхность цилиндра радиуса R и высоты h разрезать по образующей AB и развернуть на плоскость, то в результате получим прямоугольник ABB_1A_1, который называется разверткой боковой поверхности цилиндра (рис. 221).

Очевидно, что сторона BB_1 этого прямоугольника есть развертка окружности основания цилиндра, следовательно, $BB_1 = 2\pi R$. Сторона AB равна образующей цилиндра, то есть $AB = h$. Значит, площадь развертки боковой поверхности цилиндра равна $2\pi Rh$. Таким образом, **площадь боковой поверхности цилиндра равна площади ее развертки.**

Задача

Параллельно оси цилиндра на расстоянии d от нее проведена плоскость, отсекающая от основания дугу β. Диагональ полученного сечения наклонена к плоскости основания под углом α. Определите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение

Пусть дан цилиндр, в основаниях которого лежат равные круги с центрами O и O_1, OO_1 — ось цилиндра. Рассмотрим плоскость, параллельную OO_1. Сечение цилиндра данной плоскостью представляет собой прямоугольник AA_1B_1B (рис. 222).

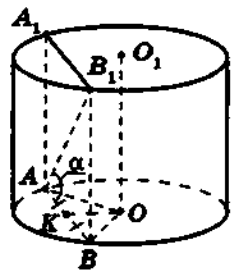


Рис. 222

Пусть хорда AB отсекает от окружности основания дугу $\beta<180°$. Тогда, по определению, $\angle AOB=\beta$. Так как образующие цилиндра перпендикулярны основаниям, $B_1B\perp(AOB)$. Значит, AB — проекция AB_1 на плоскость AOB, тогда угол между AB_1 и плоскостью AOB равен углу B_1AB. По условию $\angle B_1AB=\alpha$.

В равнобедренном треугольнике AOB $(AO=BO=R)$ проведем медиану OK. Тогда $OK\perp AB$, $\angle AOK=\dfrac{\beta}{2}$. Так как $B_1B\perp(AOB)$, то $(AA_1B_1)\perp(AOB)$ по признаку перпендикулярных плоскостей. Но тогда $OK\perp(AA_1B_1)$ по свойству перпендикулярных плоскостей. Значит, OK — расстояние между точкой O и плоскостью AA_1B_1. Учитывая, что $OO_1\parallel(AA_1B_1)$, по определению расстояния между параллельными прямой и плоскостью получаем, что OK равно расстоянию между OO_1 и плоскостью AA_1B_1. По условию $OK=d$. Из прямоугольного треугольника AKO $\left(\angle AKO=90°,\ OK=d,\ \angle AOK=\dfrac{\beta}{2}\right)$ имеем: $AO=\dfrac{d}{\cos\dfrac{\beta}{2}}$; $AK=d\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\beta}{2}$, откуда $AB=2d\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\beta}{2}$. Из прямоугольного треугольника ABB_1 $\left(\angle ABB_1=90°,\ \angle B_1AB=\alpha,\ AB=2d\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\beta}{2}\right)$: $BB_1=2d\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\beta}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$.

Итак, $S_{бок} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot AO \cdot BB_1 = 2\pi \cdot \dfrac{d}{\cos\dfrac{\beta}{2}} \cdot 2d\,\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{4\pi d^2 \sin\dfrac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos^2\dfrac{\beta}{2}}$.

В случае, когда $\beta > 180°$, $\angle AOB = 360° - \beta$, $\angle AOK = 180° - \dfrac{\beta}{2}$,

$AO = \dfrac{d}{\cos\left(180° - \dfrac{\beta}{2}\right)} = -\dfrac{d}{\cos\dfrac{\beta}{2}}$, $AK = d\,\mathrm{tg}\left(180° - \dfrac{\beta}{2}\right) = -d\,\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}$.

Аналогично предыдущему, и в этом случае получаем тот же результат для площади боковой поверхности.

Ответ: $\dfrac{4\pi d^2 \sin\dfrac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos^2\dfrac{\beta}{2}}$.

17.2. Площадь поверхности конуса и усеченного конуса

Связь между цилиндрами и призмами полностью аналогична связи между конусами и пирамидами. В частности, это касается формул для площадей их боковых поверхностей.

Опишем около данного конуса с радиусом основания R и образующей l правильную n-угольную пирамиду (рис. 223). Площадь ее боковой поверхности равна

$$S_{бок.\,пир_n} = \frac{1}{2} P_{осн_n} \cdot l_n,$$

где $P_{осн_n}$ — периметр основания пирамиды, l_n — апофема.

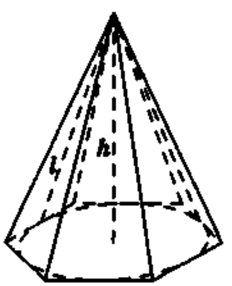


Рис. 223. К обоснованию формулы площади боковой поверхности конуса

При неограниченном возрастании n получим:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{бок.\,пир_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} P_{осн_n} \cdot \lim_{n\to\infty} l_n = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot l = \pi Rl,$$

так как периметры оснований пирамиды стремятся к длине окружности основания конуса, а апофемы l_n равны l.

Учитывая, что площадь основания пирамиды стремится к πR^2, получаем, что площадь полной поверхности конуса равна $S + \pi R^2$. Но площадь основания конуса равна πR^2. Поэтому найденную величину S принимают за площадь боковой поверхности конуса. Итак, площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле

$$S_{бок} = \pi R l,$$

где R — радиус основания, l — образующая.

За площадь полной поверхности конуса принимается сумма площадей его основания и боковой поверхности:

$$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = \pi R^2 + \pi R l = \pi R(R + l).$$

Если боковую поверхность конуса разрезать по образующей PA и развернуть на плоскость, то в результате получим круговой сектор PAA_1, который называется разверткой боковой поверхности конуса (рис. 224).

Очевидно, что радиус сектора развертки равен образующей конуса l, а длина дуги AA_1 — длине окружности основания конуса, то есть $2\pi R$. Учитывая, что площадь соответствующего круга равна πR^2, получаем: $\frac{S_{сект}}{\pi R^2} = \frac{2\pi l}{2\pi R}$, значит, $S_{сект} = \pi R l$. Таким образом, площадь боковой поверхности конуса равна площади ее развертки.

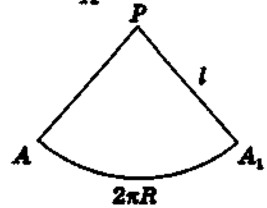


Рис. 224. Развертка боковой поверхности конуса

Учитывая формулу для площади боковой поверхности конуса, нетрудно найти площадь боковой поверхности усеченного конуса.

Рассмотрим усеченный конус, полученный при пересечении конуса с вершиной P некоторой секущей плоскостью (рис. 225).

Пусть A_1A — образующая усеченного конуса ($AA_1 = l$), точки O и O_1 — центры большего и меньшего оснований с радиусами R и r соответственно. Тогда площадь боковой поверхности усеченного конуса равна разности площадей боковых поверхностей двух конусов:

$$S_{бок} = \pi R \cdot PA - \pi r \cdot PA_1 = \pi R(PA_1 + A_1A) - \pi r \cdot PA_1 =$$

$$= \pi R l + \pi \cdot PA_1(R - r).$$

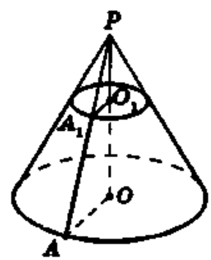


Рис. 225. К обоснованию площади боковой поверхности усеченного конуса

Из подобия треугольников PA_1O_1 и PAO следует, что $\frac{PA_1}{r} = \frac{PA}{R}$, или $\frac{PA_1}{PA_1 + l} = \frac{r}{R}$.

Тогда получаем $PA_1 = \dfrac{l \cdot r}{R - r}$.

Таким образом, $S_{бок} = \pi Rl + \pi \cdot \dfrac{lr}{R - r}(R - r) = \pi(R + r)l$.

Итак, мы получили формулу для вычисления площади боковой поверхности усеченного конуса: $S_{бок} = \pi(R + r)l$, где R и r — радиусы оснований усеченного конуса, l — его образующая.

Отсюда ясно, что площадь полной поверхности усеченного конуса равна $S_{полн} = \pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)$.

Такой же результат можно было бы получить, если найти площадь развертки боковой поверхности усеченного конуса или использовать правильные усеченные пирамиды, описанные около него. Попробуйте дать соответствующие определения и провести необходимые рассуждения самостоятельно.

17.3. Связь между площадями поверхностей и объемами

При рассмотрении объемов и площадей поверхностей цилиндра и конуса мы видели, что существует тесная взаимосвязь между этими фигурами и призмами и пирамидами соответственно. Оказывается, что и сфера (шар), вписанная в многогранник, связана с величиной его объема.

Рис. 226. Многогранник, описанный около сферы

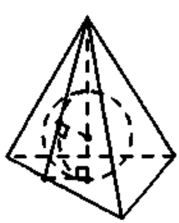


Рис. 227. Сфера, вписанная в тетраэдр

Определение

Сфера (шар) называется **вписанной в выпуклый многогранник**, если она касается каждой его грани.

При этом многогранник называется описанным около данной сферы (рис. 226).

Рассмотрим, например, сферу, вписанную в тетраэдр (рис. 227).

Плоскости, содержащие грани тетраэдра, являются касательными к вписанной сфере, а точки касания лежат в гранях тетраэдра. Заметим, что по доказанному в п. 14.2 радиусы вписанной сферы, проведенные в точку касания с поверхностью многогранника, перпендикулярны плоскостям граней этого многогранника.

Для описанных многоугольников на плоскости было доказано, что их площадь равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности. Аналогичное свойство связывает объем описанного многогранника и площадь его поверхности.

Теорема (о связи площади поверхности и объема описанного многогранника)

Объем описанного многогранника вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{полн}}\cdot r,$$

где $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности многогранника, r — радиус вписанной сферы.

Доказательство

□ Соединим центр вписанной сферы O со всеми вершинами многогранника A_1, A_2, A_3, ... (рис. 228). Получим n пирамид, основаниями которых являются грани многогранника, вершины совпадают с точкой O, высоты равны r. Тогда объем многогранника, по аксиоме, равен сумме объемов этих пирамид. Используя формулу объема пирамиды, найдем объем данного многогранника:

$$V=\frac{1}{3}S_1\cdot r+\frac{1}{3}S_2\cdot r+\ldots+\frac{1}{3}S_n\cdot r=$$
$$=\frac{1}{3}r\cdot(S_1+S_2+\ldots+S_n)=\frac{1}{3}S_{\text{полн}}\cdot r,$$

где S_1, S_2, S_3, ... — площади граней многогранника.

Теорема доказана. ■

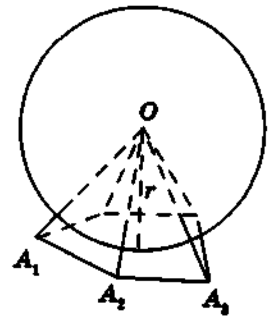


Рис. 228. К доказательству связи между площадью поверхности и объемом описанного многогранника

Оказывается, что в любой тетраэдр можно вписать сферу, и только одну. Но не каждый выпуклый многогранник обладает этим свойством.

Рассматривают также сферы, описанные около многогранника.

Определение

Сфера называется **описанной около многогранника**, если все его вершины лежат на сфере.

При этом многогранник называется вписанным в сферу (рис. 229).

Также считается, что соответствующий шар описан около многогранника.

Около любого тетраэдра можно описать единственную сферу, но не каждый многогранник обладает соответствующим свойством.

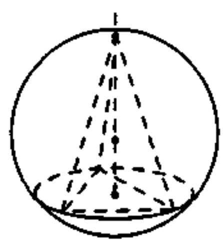


Рис. 229. Вписанный многогранник

17.4. Площадь сферы

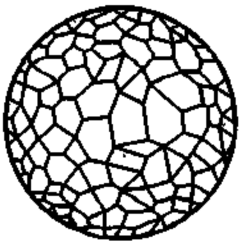


Рис. 230. К обоснованию формулы площади сферы. Описанный многогранник

Применим полученную связь для объемов и площадей поверхностей описанных многогранников к выводу формулы площади сферы.

Опишем около сферы радиуса R выпуклый многогранник (рис. 230).

Пусть S' — площадь полной поверхности данного многогранника, а любые две точки одной грани удалены друг от друга меньше чем на ε. Тогда объем многогранника равен $V=\frac{1}{3}S'\cdot R$. Рассмотрим расстояние от центра сферы O до любой вершины многогранника, например A_1 (рис. 231).

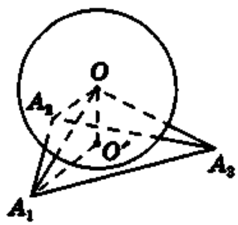


Рис. 231. К обоснованию формулы площади сферы

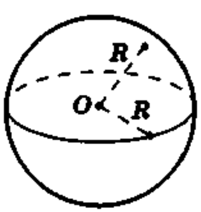
По неравенству треугольника $OA_1 \leq OO' + O'A_1 < R+\varepsilon$, где O' — точка касания. Отсюда следует, что все вершины данного многогранника лежат внутри шара с центром O и радиусом $R+\varepsilon$.

Итак, объем V данного многогранника больше объема шара радиуса R и меньше объема шара радиуса $R+\varepsilon$, то есть $\frac{4}{3}\pi R^3 < \frac{1}{3}S'\cdot R < \frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3$.

Отсюда получаем $4\pi R^2 < S' < 4\pi(R+\varepsilon)^2\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{R}\right)$.

Если неограниченно уменьшать размеры граней многогранника, то есть при ε, стремящемся к нулю, левая и правая части последнего неравенства будут стремиться к $4\pi R^2$, а многогранник все плотнее примыкать к сфере. Поэтому полученную величину для предела S' принимают за площадь сферы.

Итак, площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле $S=4\pi R^2$.



$S_{сф}=4\pi R^2=4S_{кр}$

Рис. 232. Связь площадей сферы и большого круга

Доказанная формула означает, что площадь сферы равна четырем площадям ее большого круга (рис. 232).

Исходя из аналогичных рассуждений, можно получить формулу для площади сферической части шарового сегмента с высотой H:

$$S_{\text{сф.ч}} = 2\pi RH.$$

Оказывается, что эта формула справедлива и для площади сферической поверхности шарового слоя (пояса):

$$S_{\text{сф.ч}} = 2\pi RH,$$

где H — высота слоя (пояса).

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

777*. Может ли развертка боковой поверхности цилиндра быть квадратом?

778. Может ли развертка боковой поверхности конуса быть кругом?

779*. Как изменится площадь поверхности шара, если объем шара увеличится в 27 раз?

780. Существует ли невыпуклый многогранник, вписанный в сферу?

МОДЕЛИРУЕМ

781. Из плотной бумаги сделайте круг и разрежьте его на два сектора, площади которых относятся как 1:2. Используя данные секторы, сделайте два конуса. Найдите отношение площадей полных поверхностей полученных конусов.

→ 782. Из плотной бумаги изготовьте два одинаковых прямоугольника, стороны которых относятся как 1:2. Используя данные прямоугольники, склейте два разных цилиндра. Найдите отношение площадей полных поверхностей полученных цилиндров.

783. Измерьте диаметр волейбольного мяча и найдите площадь его поверхности. Используя полученный результат, найдите площадь одного кожаного кусочка поверхности мяча.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Уровень А

784*. Найдите площадь:

а) боковой поверхности цилиндра радиуса 3 см и высоты 5 см;

б) полной поверхности конуса с диаметром 6 см и образующей 5 см;

в) полной поверхности цилиндра, осевое сечение которого является квадратом со стороной a;

г) боковой поверхности конуса, осевое сечение которого является прямоугольным треугольником с гипотенузой c.

→ **785.** Прямоугольник со сторонами 1 см и 3 см вращается вокруг меньшей стороны. Найдите боковую поверхность полученного тела вращения.

→ **786.** Угол между высотой и образующей конуса составляет 30°. Найдите полную поверхность конуса, если образующая равна 14 см.

787. Образующая усеченного конуса равна 2 см и наклонена к основанию под углом 45°. Найдите полную поверхность данного конуса, если его высота равна радиусу меньшего основания.

→ **788.** Осевое сечение усеченного конуса является равнобедренной трапецией с высотой 3 см и основаниями 12 см и 20 см. Найдите боковую поверхность усеченного конуса.

789*. Найдите площадь поверхности шара, если:

а) его радиус равен 2 см;

б) длина его большой окружности равна 6π см.

790. Земная суша составляет около 29 % земной поверхности. Во сколько раз площадь земной суши больше поверхности Луны, если диаметр Земли приблизительно равен 13 000 км, а диаметр Луны — 3500 км?

→ **791*.** Найдите площадь поверхности шара, объем которого равен 288π см^3.

Уровень Б

792. Площади боковой и полной поверхностей цилиндра относятся как 2 : 3. Найдите угол между диагоналями осевого сечения цилиндра.

793. Угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания равен γ. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если диагональ равна d.

→ **794.** В цилиндре высота h равна радиусу основания r. Докажите, что площадь полной поверхности цилиндра равна площади круга радиуса $h+r$.

795. Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, пересекающая нижнее основание по хорде, которую видно из центра этого основания под углом 2α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если диагональ полученного сечения равна d и наклонена к плоскости основания под углом β.

→ **796.** Длина хорды нижнего основания цилиндра, которую видно из центра этого основания под углом 2α, равна a. Отрезок, соединяющий середину этой хорды с центром верхнего основания, образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

797. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая его основание по хорде, которую видно из центра основания под углом α, а из вершины — под углом β. Определите боковую поверхность конуса, если расстояние от центра его основания до середины образующей равно m.

798. Площадь боковой поверхности конуса втрое больше площади основания. Найдите площадь полной поверхности конуса, если диаметр основания равен 4 см.

→ **799.** Отрезок, соединяющий центр основания конуса с серединой образующей, наклонен к плоскости основания под углом φ. Длина этого отрезка равна d. Найдите полную поверхность конуса.

800. В шаре по разные стороны от центра проведены два параллельных сечения на расстоянии 14 см друг от друга. Площади сечений равны 64π см^2 и 36π см^2. Найдите площадь поверхности шара.

801. Радиус шара равен R, а радиус его сечения плоскостью — r. Найдите площадь полной поверхности меньшего шарового сегмента.

→ **802.** На каком расстоянии от центра шара радиуса 6 см должен находиться точечный источник света, чтобы им освещалась треть поверхности шара?

803. Радиусы оснований шарового пояса равны 10 см и 12 см, а его высота — 11 см. Найдите площадь сферической поверхности шарового пояса, если параллельные плоскости, пересекающие шар, расположены по разные стороны от центра шара.

→ **804.** Радиус шара равен R, а радиус его сечения плоскостью — r. Найдите площадь сферической части поверхности большего шарового сегмента.

Уровень В

805. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а плоский угол при вершине — α. Найдите площадь вписанной сферы.

→ **806.** Высота правильной четырехугольной пирамиды равна H, а плоский угол при вершине — β. Найдите площадь поверхности описанного шара.

807. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, сторона основания которого равна a и угол при основании α. Все боковые грани наклонены к основанию под углом β. Найдите площадь поверхности вписанного шара.

808. В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно d. Найдите полную поверхность вписанного в пирамиду конуса, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом φ.

→ **809.** В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от середины высоты пирамиды до бокового ребра равно m. Найдите полную поверхность описанного около пирамиды конуса, образующая которого составляет с высотой угол α.

810. Цилиндр вписан в прямую призму, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Бо́льшая диагональ призмы равна d, а меньшая — наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите боковую поверхность цилиндра.

→ **811.** Цилиндр описан около прямоугольного параллелепипеда, бо́льшая сторона основания которого равна a. Диагональ параллелепипеда образует с основанием угол α, а с большей боковой гранью — угол φ. Найдите полную поверхность цилиндра.

Тестовое задание для самопроверки № 4

1. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями 3 см, 2 дм, 1 м.

а) 6 см^3; б) 60 см^3; в) 600 см^3; г) 6000 см^3.

2. Образующая конуса равна 5 см, а диаметр основания — 8 см. Найдите объем конуса.

а) 48π см^3; б) 16π см^3; в) 20π см^3; г) 40π см^3.

3. Площадь поверхности куба равна 6 см^2. Найдите его объем.

а) 1 см^3; б) 2 см^3; в) 1,5 см^3; г) 3 см^3.

4. Высота цилиндра равна диаметру основания d. Найдите объем цилиндра.

а) $\frac{d^3}{4}$; б) πd^3; в) πd^2; г) $\frac{\pi d^3}{4}$.

5. **Найдите объем правильной шестиугольной призмы, площадь наибольшего диагонального сечения которой равна 36 см^2, а высота вдвое меньше ребра основания.**

а) $27\sqrt{3}$ см^3; в) $168\sqrt{3}$ см^3;

б) $162\sqrt{3}$ см^3; г) $81\sqrt{3}$ см^3.

6. **Найдите площадь поверхности шара, объем которого равен 4,5π см^3.**

а) 9 см^2; б) 90π см^2; в) 9π см^2; г) 90 см^2.

7. **Образующая конуса равна 6 см и наклонена к основанию под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности конуса.**

а) 18 см^2; б) $18\sqrt{3}\pi$ см^2; в) 36π см^2; г) 18π см^2.

8. **Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна 64 см^2, а площадь боковой поверхности — 80 см^2. Найдите объем пирамиды.**

а) 192 см^3; б) 64 см^3; в) 144 см^3; г) 16 см^3.

9. **В основании прямой призмы лежит ромб с острым углом 60°. Меньшая диагональ призмы равна 12 см и наклонена к основанию под углом 45°. Найдите объем призмы.**

а) $216\sqrt{6}$ см^3; в) $216\sqrt{3}$ см^3;

б) $216\sqrt{2}$ см^3; г) $144\sqrt{6}$ см^3.

10. **Найдите объем правильного тетраэдра с ребром a.**

а) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$; б) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$; в) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$; г) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

11. **Осевое сечение конуса является прямоугольным треугольником. Площадь боковой поверхности конуса равна площади поверхности некоторого шара. Найдите отношение их объемов.**

а) $1:2$; б) $\sqrt{2}:\sqrt[4]{4}$; в) $\sqrt{2}:\sqrt[4]{2}$; г) $1:\sqrt[4]{2}$.

12. **В основании пирамиды лежит трапеция, основания которой равны 12 см и 16 см, а одна из боковых сторон — 13 см. Высота пирамиды равна 6 см. Найдите объем пирамиды, если все грани наклонены к основанию под одним и тем же углом.**

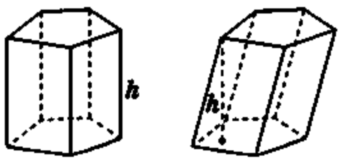
а) 1008 см^2; б) 672 см^2; в) 336 см^2; г) 364 см^2.

Итоги главы IV

Итоговый обзор главы IV

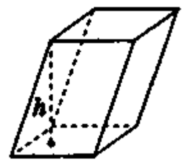
Формулы объемов и площадей поверхностей геометрических тел

Призма



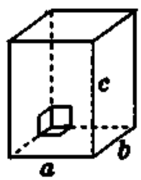
$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

Параллелепипед



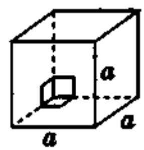
$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

Прямоугольный параллелепипед



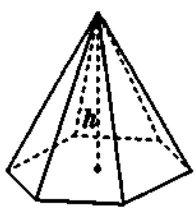
$$V = abc$$

Куб



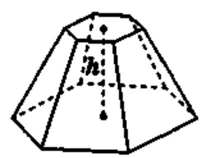
$$V = a^3$$

Пирамида



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

Усеченная пирамида

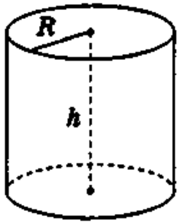


$$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)$$

Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td>

Цилиндр



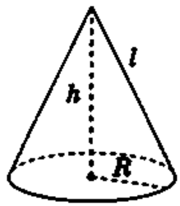
$V=\pi R^2 h$

$S_{бок}=2\pi Rh$

$S_{полн}=2\pi R(R+h)$

</td>
<td>

Конус



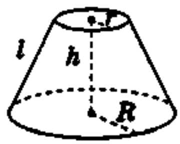
$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$

$S_{бок}=\pi Rl$

$S_{полн}=\pi R(R+l)$

</td>
<td>

Усеченный конус



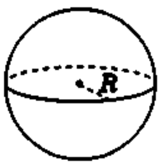
$V=\frac{1}{3}\pi h\left(r^2+R^2+rR\right)$

$S_{бок}=\pi(R+r)l$

$S_{полн}=\pi(R+r)l+\pi\left(R^2+r^2\right)$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

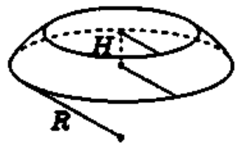
Шар и сфера



$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \quad S=4\pi R^2$

</td>
<td colspan="2">

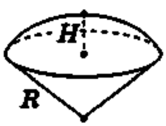
Шаровой слой (пояс)



$S_{сф.ч}=2\pi RH$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

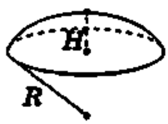
Шаровой сектор



$V=\frac{2}{3}\pi R^2 H$

</td>
<td colspan="2">

Шаровой сегмент



$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right) \quad S_{сф.ч}=2\pi RH$

</td>
</tr>
</table>

Контрольные вопросы к главе IV

1. Сформулируйте аксиомы объема для многогранников.

2. Сформулируйте теоремы об объеме прямоугольного параллелепипеда и куба.

3. Сформулируйте теорему об объеме параллелепипеда.

4. Докажите формулу объема призмы.

5. Дайте определение призмы, вписанной в цилиндр, и призмы, описанной около него.

6. Обоснуйте формулу объема цилиндра.

7. Сформулируйте интегральную формулу объема.

8. Сформулируйте принцип Кавальери.

9. Докажите формулу объема пирамиды.

10. Сформулируйте формулу объема усеченной пирамиды.

11. Дайте определение пирамиды, вписанной в конус, и пирамиды, описанной около него.

12. Сформулируйте теоремы об объеме конуса и объеме усеченного конуса.

13. Докажите формулу объема шара.

14. Дайте определение шарового сегмента и сектора, приведите формулы для вычисления их объемов.

15. Сформулируйте правило, по которому связаны объемы подобных тел.

16. Сформулируйте правила для нахождения площадей поверхностей конуса, усеченного конуса и цилиндра.

17. Дайте определение сферы, вписанной в многогранник, и сферы, описанной около него.

18. Сформулируйте правила для нахождения площади сферы и сферического сегмента.

Дополнительные задачи к главе IV

812. Боковые ребра треугольной пирамиды равны 1 см, 2 см и 3 см, а плоские углы при вершине — 90°. Найдите объем пирамиды.

813. Найдите объем правильного октаэдра с ребром a.

814. Найдите объем и полную поверхность равностороннего цилиндра радиуса R.

815. Найдите объем и полную поверхность равностороннего конуса радиуса R.

816. Высота пирамиды разделена на четыре равные части. Через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите отношение объемов четырех полученных частей пирамиды.

817. Параллелограмм вращается последовательно вокруг своих сторон a и b. Найдите отношение объемов тел вращения.

818. Радиус шара равен R. Определите полную поверхность шарового сектора, если дуга в осевом сечении сектора равна 90°.

819 (опорная). ***Пусть тело, полученное при вращении вокруг оси Ox графика функции $y=f(x)$, заключено между параллельными плоскостями α и β, перпендикулярными оси Ox. Тогда его объем можно вычислить по формуле $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$, где a и b — абсциссы координат точек пересечения оси Ox с плоскостями α и β соответственно ($a<b$).*** Обоснуйте.

820. Докажите, что объем шара диаметра d равен $\frac{\pi d^3}{6}$.

821. Если в перпендикулярное сечение призмы можно вписать окружность, то объем призмы равен половине произведения радиуса этой окружности на площадь боковой поверхности призмы. Докажите.

822. Найдите геометрическое место точек — вершин всех пирамид с объемом V, общим основанием которых является данный многоугольник с площадью S.

823. Если два цилиндра равновелики, то площади их боковых поверхностей обратно пропорциональны радиусам данных цилиндров. Докажите.

Задачи повышенной сложности

824. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Через сторону основания проведено сечение, перпендикулярное противолежащему боковому ребру. Найдите объемы частей пирамиды.

825. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а двугранный угол при боковом ребре — φ. Найдите объем пирамиды.

826. Полная поверхность конуса равна S. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем конуса.

827. Докажите, что среди всех прямоугольных параллелепипедов с данной диагональю наибольший объем имеет куб.

828. Дана треугольная пирамида $PABC$. На лучах PA, PB, PC выбраны точки M, N, K соответственно таким образом, что $\frac{PM}{PA}=\lambda_1$, $\frac{PN}{PB}=\lambda_2$, $\frac{PK}{PC}=\lambda_3$. Докажите, что $\frac{V_{PMNK}}{V_{PABC}}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

829. Докажите, что объем тетраэдра $PABC$ равен $d\cdot AB\cdot CP\cdot\sin\varphi$, где d — расстояние между прямыми AB и CP, φ — угол между ними.

830. В треугольной пирамиде все двугранные углы при ребрах основания равны α. Найдите объем пирамиды, если длины этих ребер равны a, b, c.

831. Докажите, что объем шарового слоя можно вычислить по формуле $V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi\left(r_1{}^2+r_2{}^2\right)h$, где h — высота слоя, r_1 и r_2 — радиусы его оснований.

832. Площадь полной поверхности шарового сектора можно вычислить по формуле $S_{\text{полн}}=\pi R\left(2H+\sqrt{2RH-H^2}\right)$, где R — радиус шара, H — высота соответствующего сегмента. Обоснуйте.

833 (опорная). ***Для любой правильной пирамиды существует ровно один вписанный шар и ровно один описанный шар. Центр вписанного шара лежит на высоте, центр описанного — на прямой, содержащей высоту.*** Докажите.

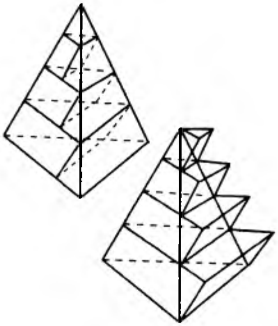
834 (опорная). ***Шар можно вписать в прямую призму тогда и только тогда, когда в ее основания можно вписать окружности, а высота призмы равна диаметрам этих окружностей. Шар можно описать около прямой призмы тогда и только тогда, когда около ее оснований можно описать окружности. Центром вписанного (описанного) шара является середина высоты призмы, соединяющей центры вписанных (описанных) окружностей ее оснований.*** Докажите.

835 (опорная). ***В любую пирамиду с равными двугранными углами при основании можно вписать шар и только один. Его центр лежит на высоте пирамиды. Около любой пирамиды с равными боковыми ребрами можно описать шар и только один. Его центр лежит на прямой, содержащей высоту.*** Докажите.

836 (опорная). ***Для любого тетраэдра существует ровно один вписанный шар и ровно один описанный шар.*** Докажите.

Демокрит

Бонавентура Кавальери



Чертова лестница

Историческая справка

Многие формулы для вычисления объемов многогранников были известны уже в Древнем Египте. В так называемом Московском папирусе, созданном около 4000 лет назад, вероятно, впервые в истории вычисляется объем усеченной пирамиды. Но четкие доказательства большинства формул для объемов появились позднее, в работах древнегреческих ученых.

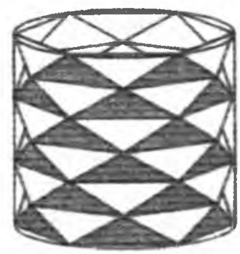
Так, доказательства формул для объемов конуса и пирамиды связаны с именами Демокрита из Абдеры (ок. 460–370 гг. до н. э.) и Евдокса Книдского (ок. 408–355 гг. до н. э.). На основании их идей выдающийся математик и механик Архимед (287–212 гг. до н. э.) вычислил объем шара, нашел формулы для площадей поверхностей цилиндра, конуса, сферы.

Дальнейшее развитие методы, предложенные Архимедом, получили благодаря трудам средневекового итальянского монаха и математика Бонавентуры Кавальери (1598–1647). В своей книге «Геометрия неделимых» он сформулировал принцип сравнения объемов, при котором используются площади сечений. Его рассуждения стали основой интегральных методов вычисления объемов, разработанных Исааком Ньютоном (1642 (1643)–1727) и Готфридом Вильгельмом фон Лейбницем (1646–1716). Во многих учебниках по геометрии объем пирамиды находится с помощью «чертовой лестницы» — варианта древнегреческого метода вычерпывания, предложенного французским математиком А. М. Лежандром (1752–1833).

На II Международном конгрессе математиков, который состоялся в 1900 году в Париже, Давид Гильберт сформулировал, в частности, такую проблему: верно ли, что любые два равновеликих многогранника являются равносоставленными? Уже через год отрицательный ответ на этот вопрос был обоснован учеником Гильберта Максом Деном (1878–1952). Другое доказательство этого факта предложил в 1903 году известный геометр В. Ф. Каган, который в начале XX века вел плодотворную научную и просветительскую деятельность в Одессе. В частности, из работ Дена и Кагана следует, что доказательство формулы объема пирамиды невозможно без применения пределов.

Г. Минковский

Весомый вклад в развитие теории площадей поверхностей внесли немецкие математики XIX века. Так, в 1890 году Карл Герман Амандус Шварц (1843–1921) построил пример последовательности многогранных поверхностей, вписанных в боковую поверхность цилиндра («сапог Шварца»). Уменьшение их граней не приводит к приближению суммы площадей этих граней к площади боковой поверхности цилиндра. Это стало толчком к созданию выдающимся немецким математиком и физиком Германом Минковским (1864–1909) современной теории площадей поверхностей, в которой последние связаны с объемом слоя около данной поверхности.



Сапог Шварца

Учитывая огромный вклад Архимеда в развитие математики, в частности теории объемов и площадей поверхностей, именно его изобразили на Филдсовской медали — самой почетной в мире награде для молодых математиков. В 1990 году ею был награжден Владимир Дринфельд (род. в 1954 г.), который учился и некоторое время работал в Харькове. Вот так юные таланты, успешно изучающие геометрию в школе, становятся в дальнейшем всемирно известными учеными.

Филдсовская медаль

Тематика сообщений и рефератов к главе IV

1. Измерение объемов в древние времена.
2. Комбинации тел.
3. Принцип Кавальери.
4. Равновеликие и равносоставленные многогранники.
5. Площадь поверхности по Г. Минковскому.

Рекомендованные источники информации

1. Математична хрестоматія. Т. 1, 2. — К.: Рад. шк., 1970.

2. Глейзер Г. И. История математики в школе. IX–X кл. — М.: Просвещение, 1983.

3. Перельман Я. И. Занимательная геометрия. — М.: Физматгиз, 1959.

4. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. Т. 2. Стереометрия, преобразования пространства. — М.: МЦНМО, 2006.

5. Інтернет-бібліотека МЦНМО. http://ilib.mirror1.mccme.ru/

6. Калинин А. Ю., Терёшин Д. А. Стереометрия-11. — М.: Издательство МФТИ, 2001.

7. Тадеєв В. О. Геометрія. Основи стереометрії. Многогранники: Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. В. І. Михайловського. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2003.

Приложение 1. Уравнения фигур в пространстве

Напомним, что ***уравнением фигуры*** F на плоскости называется уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры F и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей фигуре F. Так же определяют и уравнение фигуры в пространстве; но, в отличие от плоскости, где уравнение фигуры содержит две переменные x и y, в пространстве уравнение фигуры является уравнением с тремя переменными x, y и z.

Выведем уравнение плоскости, прямой и сферы в пространстве.

Для получения уравнения плоскости рассмотрим в прямоугольной системе координат плоскость α (рис. 233) и определим свойство, с помощью которого можно описать принадлежность произвольной точки данной плоскости. Пусть ненулевой вектор $\vec{n}(A;B;C)$ перпендикулярен α (то есть принадлежит прямой, перпендикулярной данной плоскости,— такой вектор называют ***вектором нормали*** или нормалью к плоскости α), а точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ принадлежит данной плоскости.

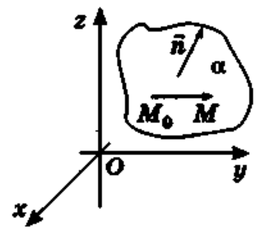


Рис. 233. К получению уравнения плоскости

Так как $\vec{n}\perp\alpha$, то вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любому вектору плоскости α. Поэтому если $M(x;y;z)$ — произвольная точка плоскости α, то $\vec{n}\perp\overline{M_0M}$, то есть $\vec{n}\cdot\overline{M_0M}=0$. Более того, если векторы $\vec{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны, то, поскольку плоскость, проходящая через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$, единственна, имеем $M_0M\subset\alpha$, то есть $M\in\alpha$. Таким образом, уравнение $\vec{n}\cdot\overline{M_0M}=0$ — критерий принадлежности точки M плоскости α. На основании этого векторного критерия выведем уравнение плоскости в пространстве.

Теорема (уравнение плоскости в пространстве)

В прямоугольной системе координат уравнение плоскости имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$, где A, B, C и D — некоторые числа, причем числа A, B и C одновременно не равны нулю.

Доказательство

☐ Запишем в координатной форме векторное равенство $\vec{n}\cdot\overline{M_0M}=0$, где $\vec{n}(A;B;C)$ — вектор нормали к данной плоскости, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ — фиксированная точка плоскости, $M(x;y;z)$ — произвольная точка плоскости. Имеем $\overline{M_0M}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$.

Следовательно, $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

После раскрытия скобок и приведения подобных членов это уравнение примет вид: $Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0$.

Обозначив числовое выражение в скобках через D, получим искомое уравнение, в котором числа A, B и C одновременно не равны нулю, так как $\vec{n}\neq\vec{0}$.

Покажем теперь, что любое уравнение вида $Ax+By+$ $+Cz+D=0$ задает в пространстве плоскость. Действительно, пусть $(x_0;y_0;z_0)$ — одно из решений данного уравнения. Тогда $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$. Вычитая это равенство из данного, получим $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Так как это уравнение является координатной записью векторного равенства $\vec{n}\cdot\overline{M_0M}=0$, то оно является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A;B;C)$. ■

Обратим внимание на то, что в доказательстве теоремы приведен способ составления уравнения плоскости по данным координатам произвольной точки плоскости и вектора нормали.

Задача

Напишите уравнение плоскости, которая перпендикулярна отрезку MN и проходит через его середину, если $M(-1;2;3)$, $N(5;-4;-1)$.

Решение

Найдем координаты точки O — середины отрезка MN:

$$x=\frac{-1+5}{2}=2,\ \ y=\frac{2+(-4)}{2}=-1,\ \ z=\frac{3+(-1)}{2}=1.$$

Значит, $O(2;-1;1)$. Так как данная плоскость перпендикулярна отрезку MN, то вектор $\overline{ON}(3;-3;-2)$ — вектор нормали к данной плоскости. Поэтому искомое уравнение имеет вид: $3x-3y-2z+D=0$.

И наконец, так как данная плоскость проходит через точку $O(2;-1;1)$, то, подставив координаты этой точки в уравнение, получим: $3\cdot2-3\cdot(-1)-2\cdot1+D=0$, $7+D=0$, $D=-7$.

Таким образом, уравнение $3x-3y-2z-7=0$ искомое.

Ответ: $3x-3y-2z-7=0$.

Заметим, что правильным ответом в данной задаче является также любое уравнение, полученное из приведенного умножением обеих частей на число, отличное от нуля.

Значения коэффициентов A, B, C и D в уравнении плоскости определяют особенности расположения плоскости в системе координат. В частности:

- если $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D = 0$, уравнение плоскости примет вид $Ax + By + Cz = 0$; очевидно, что такая плоскость проходит через начало координат (рис. 234, *а*);
- если один из коэффициентов A, B и C равен нулю, а $D \neq 0$, плоскость параллельна одной из координатных осей: например, при условии $A = 0$ вектор нормали $\vec{n}(0; B; C)$ перпендикулярен оси Ox, а плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox (рис. 234, *б*);
- если два из коэффициентов A, B и C равны нулю, а $D \neq 0$, плоскость параллельна одной из координатных плоскостей: например, при условиях $A = 0$ и $B = 0$ вектор нормали $\vec{n}(0; 0; C)$ перпендикулярен плоскости Oxy, а плоскость $Cz + D = 0$ параллельна плоскости Oxy (рис. 234, *в*);
- если два из коэффициентов A, B и C равны нулю и $D = 0$, плоскость совпадает с одной из координатных плоскостей: например, при условиях $A \neq 0$ и $B = C = D = 0$ уравнение плоскости имеет вид $Ax = 0$, или $x = 0$, то есть является уравнением плоскости Oyz (рис. 234, *г*).

Предлагаем вам самостоятельно составить полную таблицу частных случаев расположения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ в прямоугольной системе координат в зависимости от значений коэффициентов A, B, C и D.

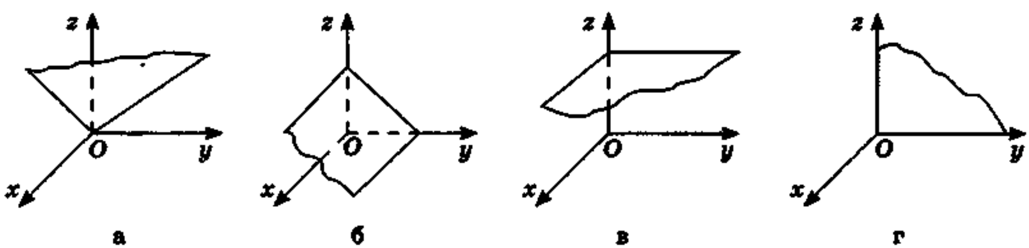


Рис. 234. Частные случаи расположения плоскости в системе координат

Опорная задача (о расстоянии от точки до плоскости)

Расстояние от точки $K(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, вычисляется по формуле

$$d(K, \alpha) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$ Докажите.

Решение

Если $K \in \alpha$, то по уравнению плоскости $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, откуда $d(K, \alpha) = 0$.

Если $K \notin \alpha$, то проведем перпендикуляр KM к плоскости α, $M(x_1; y_1; z_1) \in \alpha$.

Тогда $\overrightarrow{KM}(x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0) \parallel \vec{n}(A; B; C)$, поэтому $\overrightarrow{KM} = \lambda\vec{n}$, то есть $x_1 = x_0 + \lambda A$, $y_1 = y_0 + \lambda B$, $z_1 = z_0 + \lambda C$. Так как $M(x_1; y_1; z_1) \in \alpha$, то $A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D = 0$, откуда $\lambda = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$.

Таким образом, $d(K, \alpha) = \left|\overrightarrow{KM}\right| = \left|\overrightarrow{(\lambda A; \lambda B; \lambda C)}\right| =$

$$= \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}\right| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

Рассмотрим теперь возможность описания прямой в пространстве с помощью уравнений.

Пусть в пространстве дана прямая k (рис. 235). Выберем ненулевой вектор $\vec{p}(l; m; n)$, параллельный данной прямой или принадлежащий ей (такой вектор называют ***направляющим вектором прямой*** k), и зафиксируем точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащую данной прямой. Тогда произвольная точка пространства $M(x; y; z)$ будет принадлежать прямой k в том и только в том случае, когда векторы $\vec{p}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны, то есть существует число t такое, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{p}$.

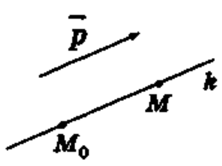


Рис. 235. Направляющий вектор прямой

Представим это векторное равенство в координатной форме. Если ни одна из координат направляющего вектора не равна нулю, из данного равенства можно выразить t и приравнять полученные результаты:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Эти равенства называют ***каноническими уравнениями прямой в пространстве.***

Задача

Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;-3;2)$ и $B(-1;0;1)$.

Решение

Так как точки A и B принадлежат данной прямой, то $\overrightarrow{AB}(-2;3;-1)$ — направляющий вектор прямой AB. Таким образом, подставив вместо x_0, y_0 и z_0 координаты точки A, получим уравнение прямой AB:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{-1}.$$

Ответ: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{-1}$.

Заметим, что ответ в этой задаче может иметь и другой вид: так, в числителях дробей можно использовать координаты точки B, а как направляющий вектор рассматривать любой ненулевой вектор, коллинеарный $\overrightarrow{AB}$ (например, вектор $\overrightarrow{BA}$).

Вообще, если прямая в пространстве задана двумя точками $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и $M_1(x_1;y_1;z_1)$, то $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0)$ — направляющий вектор прямой, а в случае, если соответствующие координаты данных точек не совпадают, канонические уравнения прямой M_0M_1 имеют вид $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$.

С помощью уравнений удобно исследовать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Рассмотрим прямые a и b с направляющими векторами $\vec{p}(l_1;m_1;n_1)$ и $\vec{q}(l_2;m_2;n_2)$ соответственно. Определение угла между данными прямыми связано с определением угла между их направляющими векторами. Действительно, пусть φ — угол между прямыми a и b. Так как по определению $\varphi\in[0°;90°]$, а угол между векторами может быть больше 90°, то $\angle(\vec{p},\vec{q})$ либо равен углу φ (рис. 236, *а*), либо дополняет его до 180° (рис. 236, *б*).

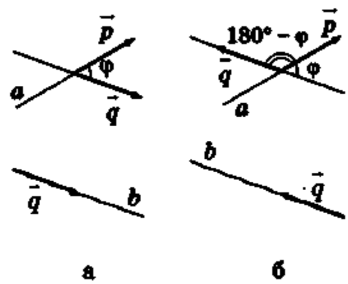


Рис. 236. Определение угла между прямыми в пространстве

Так как $\cos(180°-\varphi)=-\cos\varphi$, имеем $\cos\varphi=\left|\cos\angle(\bar{p},\bar{q})\right|$, то есть

$$\cos\varphi=\frac{|\bar{p}\cdot\bar{q}|}{|\bar{p}|\cdot|\bar{q}|}=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Отсюда, в частности, следует необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых a и b:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Кроме того, прямые a и b параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы коллинеарны, то есть существует число t такое, что $\bar{q}=t\bar{p}$, или, при условии отсутствия у векторов $\bar{p}$ и $\bar{q}$ нулевых координат,

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{n_2}{n_1}.$$

Проанализируем теперь отдельные случаи взаимного расположения двух плоскостей в пространстве. Очевидно, что если $\bar{n}(A;B;C)$ — вектор нормали к плоскости α, то все ненулевые векторы, коллинеарные $\bar{n}$, также являются векторами нормали к плоскости α. Из этого следует, что две плоскости, заданные уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$:

• совпадают, если существует число t такое, что $\overline{(A_2;B_2;C_2)}=t\overline{(A_1;B_1;C_1)}$ и $D_2=tD_1$, или, если числа A_1, B_1, C_1 и D_1 ненулевые, $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}$;

• параллельны, если существует число t такое, что $\overline{(A_2;B_2;C_2)}=t\overline{(A_1;B_1;C_1)}$ и $D_2\neq tD_1$, или, если координаты A_1, B_1, C_1 и D_1 ненулевые, $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}\neq\frac{D_2}{D_1}$ (на практике это означает, что уравнения данных плоскостей можно привести к виду $Ax+By+Cz+D_1=0$ и $Ax+By+Cz+D_2=0$, где $D_1\neq D_2$).

В остальных случаях данные плоскости α и β пересекаются, причем угол между ними связан с углом между векторами нормалей $\bar{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ и $\bar{n}_2(A_2;B_2;C_2)$. Предлагаем вам самостоятельно обосновать формулу для определения угла между плоскостями α и β:

$$\cos\angle(\alpha,\beta)=\left|\cos\angle(\bar{n}_1,\bar{n}_2)\right|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

В частности, необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей α и β выражается равенством $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Заметим также, что прямая в пространстве может быть описана как линия пересечения двух плоскостей, то есть системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

где векторы $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$ не коллинеарны.

Задача

Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(4;2;3)$ и параллельна плоскости $x-y+2z-3=0$.

Решение

Так как искомая плоскость параллельна данной, то вектор нормали к данной плоскости $\vec{n}(1;-1;2)$ является также вектором нормали к искомой плоскости. Значит, искомое уравнение имеет вид $x-y+2z+D=0$. Так как точка M принадлежит искомой плоскости, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости, то есть $4-2+2\cdot3+D=0$, $D=-8$. Следовательно, уравнение $x-y+2z-8=0$ искомое.

Ответ: $x-y+2z-8=0$.

Аналогично уравнению окружности на плоскости, в пространственной декартовой системе координат можно вывести уравнение сферы с заданным центром и радиусом.

Теорема **(уравнение сферы)**

В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O(a;b;c)$ имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Доказательство

□ Пусть $M(x;y;z)$ — произвольная точка сферы радиуса R с центром $O(a;b;c)$ (рис. 237). Расстояние между точками O и M вычисляется по формуле $OM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$.

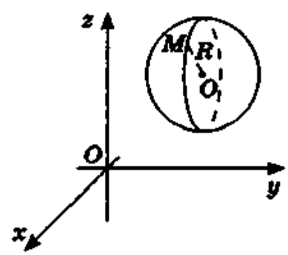


Рис. 237. К доказательству теоремы об уравнении сферы

Так как $OM=R$, то есть $OM^2=R^2$, то координаты точки M удовлетворяют уравнению $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Если же точка M не является точкой сферы, то $OM\neq R$, значит, координаты точки M не удовлетворяют данному уравнению. ■

Следствие

Сфера радиуса R с центром в начале координат задается уравнением вида

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Заметим, что фигуры в пространстве, как и на плоскости, могут задаваться не только уравнениями, но и неравенствами. Например, шар радиуса R с центром в точке $O(a;b;c)$ задается неравенством $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leq R^2$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Задача

Напишите уравнение сферы с центром $A(2;-8;16)$, которая проходит через начало координат.

Решение

Так как данная сфера проходит через точку $O(0;0;0)$, то отрезок AO является ее радиусом. Значит,

$$R=AO=\sqrt{(2-0)^2+(-8-0)^2+(16-0)^2}=18.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид:

$$(x-2)^2+(y+8)^2+(z-16)^2=324.$$

Ответ: $(x-2)^2+(y+8)^2+(z-16)^2=324$.

Вопросы и задачи

ОБСУЖДАЕМ ТЕОРИЮ

837. Назовите координаты вектора нормали к плоскости, заданной уравнением $3x-y+2z+5=0$. Является ли вектором нормали к данной плоскости вектор $\vec{n}(6;-2;4)$? Можно ли записать уравнение данной плоскости в виде $6x-2y+4z+5=0$?

838. Назовите координаты направляющего вектора прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{4}$. Назовите координаты любой точки, принадлежащей данной прямой. Принадлежит ли данной прямой точка $(3;-3;4)$?

839. Прямая имеет направляющий вектор $\vec{p}(-3;1;0)$. Как расположена данная прямая относительно координатных плоскостей? Может ли она проходить через начало координат?

840. Плоскость задана уравнением $x+4y-z+1=0$. Определите взаимное расположение этой плоскости и плоскости, заданной уравнением:

а) $x+4y-z=0$;
б) $x-4y+z+1=0$;
в) $2x+8y-2z+2=0$.

841. Назовите центр и радиус сферы, заданной уравнением:

а) $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=64$;
б) $(x+5)^2+y^2+(z-6)^2=121$;
в) $x^2+y^2+z^2=8$.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ*

Уровень А

842. Среди точек $A(1;2;-4)$, $B(-1;-2;-3)$, $C(3;1;-2)$, $D(2;0;3)$, $E(0;1;4)$ выберите те, которые принадлежат плоскости, заданной уравнением $2x-3y+z-1=0$.

843. Найдите точки пересечения плоскости $x+2y-3z-6=0$ с осями координат.

844. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $K(2;-1;-2)$ и перпендикулярна вектору $\vec{n}(-3;2;1)$.

845. Напишите уравнение плоскости, которая:

а) проходит через точку C перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(1;-2;3)$, $B(5;0;4)$, $C(2;1;-3)$;
б) проходит через начало координат O перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OM}$, если $M(7;1;-2)$.

846. Напишите уравнение плоскости, которая перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину, если $A(-6;1;0)$, $B(4;3;-8)$.

* Ко всем задачам на составление уравнений плоскостей и прямых приведен один из возможных вариантов записи правильного ответа.

847. Среди точек $A(7;-7;8)$, $B(1;-3;0)$, $C(-2;-5;4)$, $D(4;-5;-4)$, $E(-0,5;-2;2)$ выберите те, которые принадлежат прямой $\frac{x-1}{3}=$ $=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{-4}$.

848. Напишите уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{p}(1;-4;3)$, которая проходит через точку $M(1;1;1)$.

849. Напишите уравнение прямой AB, если $A(4;0;-3)$, $B(1;1;2)$.

850. Найдите координаты точек пересечения прямой $\frac{x-3}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$ с координатными плоскостями.

851. Докажите, что:

а) прямые $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{8}=\frac{z-7}{-4}$ и $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z}{2}$ параллельны;

б) плоскости $2x-y-z+9=0$ и $3x+2y+4z-1=0$ перпендикулярны.

852. Докажите, что:

а) прямые $\frac{x+4}{-6}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{4}$ и $\frac{x}{3}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z+9}{6}$ перпендикулярны;

б) плоскости $y+z-1=0$ и $x+y+1=0$ пересекаются под углом $60°$.

853. Напишите уравнение сферы:

а) с центром $O(-3;2;1)$ и радиусом 5;

б) с центром в начале координат и диаметром 14.

Уровень Б

854 (опорная). ***Плоскость, пересекающая оси координат в точках $(a;0;0)$, $(0;b;0)$ и $(0;0;c)$, где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, задается уравнением $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (уравнение плоскости в отрезках на осях)***. Докажите.

855. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки:

а) $A(3;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;1)$;

б) $A(1;2;3)$, $B(4;3;2)$, $C(7;0;-1)$.

856. Напишите уравнение плоскости, которая параллельна плоскости $x-2y+3z-4=0$ и проходит через точку $M(-1;1;3)$.

→ 857. **Одна из граней параллелепипеда лежит в плоскости $3x-y-z+4=0$. Напишите уравнение плоскости, содержащей противолежащую грань, если одна из вершин параллелепипеда имеет координаты $(3;1;2)$.**

858. **Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку $M(1;1;2)$ и параллельна прямой $\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-5}{5}$.**

859. **Найдите координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{6}$ и плоскости $x+y+z-5=0$.**

→ 860. **Напишите уравнение прямой, которая проходит через начало координат и делит пополам отрезок AB, если $A(-2;1;5)$, $B(6;-3;1)$.**

861 (опорная). ***Угол φ между прямой с направляющим вектором $\bar{p}$ и плоскостью с вектором нормали $\bar{n}$ определяется из формулы*** $\sin\varphi=\frac{|\bar{p}\cdot\bar{n}|}{|\bar{p}|\cdot|\bar{n}|}$. **Докажите.**

862. **Найдите угол между:**

а) плоскостями $x+y-2z+4=0$ и $x-z-5=0$;

б) прямыми $\frac{x-3}{8}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+5}{-1}$ и $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+6}{4}$;

в) плоскостью $x-z-3=0$ и прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y+9}{-1}=\frac{z-3}{-2}$.

→ 863. **Найдите значения a и b, при которых:**

а) прямая $\frac{x+8}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ и плоскость $ax+by+2z+7=0$ перпендикулярны;

б) плоскости $ax+by-z-3=0$ и $2x-6y-2z+5=0$ параллельны.

864. **Напишите уравнение сферы:**

а) с диаметром AB, если $A(-3;2;0)$, $B(1;-2;2)$;

б) с центром $O(-2;3;4)$, которая касается плоскости Oxy;

в) центр которой совпадает с центром сферы $x^2-2x+y^2+4y+z^2-6z+10=0$, а радиус равен диаметру этой сферы.

→ 865. **Напишите уравнение сферы:**

а) с радиусом MN, если $M(0;1;2)$, $N(-1;5;-6)$;

б) с центром $O(-3;4;1)$, которая касается оси аппликат.

Уровень В

866. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от начала координат и точки $M(8;-4;6)$.

→ **867.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4;1;-3)$ и $B(10;-2;5)$ параллельно оси аппликат.

868. Напишите уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{5}$ и $\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}$.

869. Определите взаимное расположение прямых, заданных уравнениями:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{6}$ и $\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{6}=\frac{z-9}{12}$;

б) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+4}{-2}$;

в) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{4}$ и $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{2}$;

г) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{5}$ и $\frac{x}{7}=\frac{y}{11}=\frac{z}{13}$.

→ **870.** Докажите, что прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ принадлежит плоскости $4x+3y-z+3=0$.

871. Найдите геометрическое место точек $C(x;y;z)$ таких, что треугольник ABC является прямоугольным с гипотенузой AB, если $A(-6;1;8)$, $B(12;-11;4)$.

→ **872.** Найдите расстояние между параллельными плоскостями, заданными уравнениями $x+y+z-1=0$ и $x+y+z-3=0$.

873. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки сферы, описанной около куба, до вершин куба не зависит от выбора точки.

874. С помощью координатного метода найдите высоту треугольной пирамиды, боковые ребра которой попарно перпендикулярны и равны a, b, c.

875. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. С помощью координатного метода найдите:

а) угол и расстояние между прямыми A_1D и D_1C;

б) угол между плоскостями AB_1D_1 и A_1C_1D;

в) угол между прямой AB_1 и плоскостью AD_1C;

г) расстояние между плоскостями A_1BD и CB_1D_1.

Приложение 2. Доказательство формулы объема прямоугольного параллелепипеда

Теорема (формула объема прямоугольного параллелепипеда)

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:

$$V = abc,$$

где a, b, c — измерения параллелепипеда.

Доказательство

□ Докажем сначала, что объемы двух прямоугольных параллелепипедов с равными основаниями относятся как длины их высот.

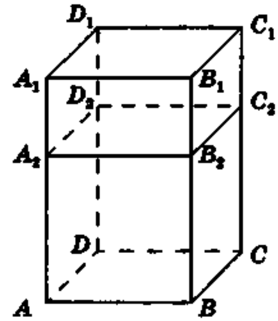


Рис. 238. Совмещение оснований параллелепипедов

Пусть P_1 и P_2 — два прямоугольных параллелепипеда с равными основаниями и объемами V_1 и V_2 соответственно. Совместим данные параллелепипеды. Для этого достаточно совместить их основания. Теперь рассмотрим объемы параллелепипедов $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $ABCDA_2B_2C_2D_2$ (рис. 238). Для определенности будем считать, что $AA_2 < AA_1$. Разобьем ребро AA_1 на n равных отрезков. Пусть на отрезке AA_2 лежит m точек деления. Тогда:

$$\left(\frac{AA_1}{n}\right)\cdot m \leq AA_2 \leq \left(\frac{AA_1}{n}\right)\cdot(m+1), \text{ то есть}$$

$$\frac{m}{n} \leq \frac{AA_2}{AA_1} \leq \frac{m+1}{n},$$

или

$$\frac{m}{n} \leq \frac{AA_2}{AA_1} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

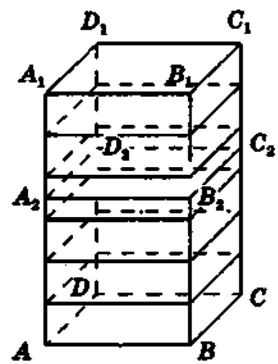


Рис. 239. Разбиение на равные параллелепипеды

Теперь проведем через точки деления плоскости, параллельные основанию $ABCD$ (рис. 239). Они разобьют параллелепипед P_1 на n равных параллелепипедов. Каждый из них имеет объем $\frac{V_1}{n}$. Очевидно, что параллелепипед P_2 содержит в себе объединение m параллелепипедов и сам содержится в объединении $(m+1)$ параллелепипедов.

Таким образом, $m \cdot \frac{V_1}{n} < V_2 < (m+1) \cdot \frac{V_1}{n}$, откуда $\frac{m}{n} < \frac{V_2}{V_1} < \frac{m+1}{n}$, или

$$\frac{m}{n} < \frac{V_2}{V_1} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), видим, что оба отношения $\frac{AA_2}{AA_1}$ и $\frac{V_2}{V_1}$ находятся между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$, то есть отличаются не больше чем на $\frac{1}{n}$ (n — натуральное число). Докажем методом от противного, что эти отношения равны.

Допустим, что это не так, то есть $\left|\frac{V_2}{V_1} - \frac{AA_2}{AA_1}\right| = \delta > 0$. Тогда найдется такое натуральное число* n, что $\frac{1}{n} < \delta$. Отсюда $\delta = \left|\frac{V_2}{V_1} - \frac{AA_2}{AA_1}\right| < \frac{1}{n} < \delta$. Из полученного противоречия следует, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{AA_2}{AA_1}$, то есть объемы двух прямоугольных параллелепипедов с равными основаниями относятся как длины их высот.

Рассмотрим теперь прямоугольные параллелепипеды с измерениями a, b, c; 1, b, c; 1, 1, c и 1, 1, 1, объемы которых равны V, V_1, V_2, V_3 соответственно (рис. 240).

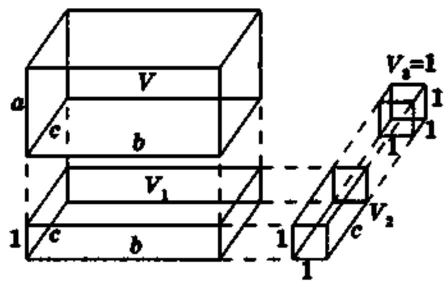


Рис. 240. Сравнение объема параллелепипеда с объемом единичного куба

По аксиоме объема $V_3 = 1$. По доказанному $\frac{V}{V_1} = \frac{a}{1}$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{1}$, $\frac{V_2}{V_3} = \frac{c}{1}$. Перемножив эти отношения, получим: $V = abc$.

Теорема доказана. ■

---

* Выберем $n > \frac{1}{\delta}$, например, $n = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$, где $\left[\frac{1}{\delta}\right]$ — целая часть дроби $\frac{1}{\delta}$.

Ответы

Глава I

11. Oxy. 12. Ox. 14. а) $(-4;5;6)$; б) $(3;-3;8)$. 15. а) $(3;-3;1)$; б) $(-2;-4;-1)$. 16. $D(-7;-8;8)$. 18. а) 3; б) 5; в) 17. 19. A. 21. $(0;-8;0)$. 22. 10; $6\sqrt{2}$; 10. 23. 0 или 2. 26. а) $B(-2;y;z)$, где y, z такие, что точки A и B не совпадают; б) $B(x;-4;3)$, где $x\neq-2$. 27. а) $a=2$, $b=3$; б) $a=2$; $b=1$. 28. $A(0;0;-2)$, $B(-8;6;0)$. 29. а) $M(-4;3;-2)$; б) $B(-2;3;-2)$. 30. 11. 31. AB. 32. $(0;2;3)$. 34. -1; 3. 35. 8 решений: $(\pm6;\pm7;\pm5)$. 36. 23. 37. 8 решений: $M\left(\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 38. $(-3;-7;0)$, $(5;1;-6)$, $(7;5;4)$. 39. A. *Указание.* Воспользуйтесь неравенством треугольника. 41. $D(-3;-1;1)$. 42. $D(3;0;-5)$. 44. $A(1;2;3)$. 45. 6. 46. 6. *Указание.* Докажите, что данный треугольник прямоугольный с гипотенузой AB. 47. $(0;0;9{,}5)$, $(0;0;-9{,}5)$, $(0;0;-1)$, $(0;0;5)$. 48. 120°, 30°, 30°; $2\sqrt{3}$. 49. 60°. 50. 8 см. 66. $B(-4;1;2)$; 2. 67. а) $(-7;12;-3)$; б) $(5;12;7)$; в) $(5;12;-7)$. 68. а) $M(-8;5;1)$; б) $B(-2;-1;5)$. 69. $(-2;-3;-1)$. 71. 60°. 72. 65°. 74. а) $(7;5;-2)$; б) $(0;-6;-1)$. 75. Нет. 79. а) $(-6;5;5)$; б) $(4;1;1)$; в) $(4;1;-1)$. 80. 3. 83. 120°; нет. 84. 40°. 85. 70°. 86. (4; 6; 4). 87. а) $A(-2;-4;3)$; б) $C(-1;-1;1)$, $D(-6;4;3)$. 91. $(-2;1;3)$. 92. В направлении луча, содержащего диагональ куба, на расстояние, меньшее длины диагонали. 93. 8 см. 94. 150 см². 101. а) 6 см; б) 64 см². 102. $AC=8$ см, $A_1B_1=6$ см. 105. а) $\frac{3}{4}$; б) $A(1;-3;2)$; в) $A'(-2;3;1)$. 106. $B'(0;-3;0)$, $C(0;0;3)$. 107. Не обязательно. 108. б) 36 см². 109. 90°. 111. а) $A'(4;0;3)$; б) $O(-14;-17;-3)$. 112. Нет. 114. $\frac{1}{3}$. 115. $\vec{0}$. 116. Прямоугольная трапеция. 128. $(-3;3;10)$; 7. 130. а) -4 и 4; б) -3 и 3. 131. а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AC}$. 132. а) $\vec{0}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{EM}$. 133. а) $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{AC}$; е) $\overrightarrow{C_1A}$. 134. а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CC_1}$. 139. Нет. 141. а) 0; б) 0; в) 1; г) -1; д) 2. 142. а) 5; б) -2; в) 2. 143. а) $\vec{b}$ и $\vec{c}$; б) $\vec{a}$ и $\vec{b}$. 144. $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$. 145. $A(0;-1;0)$, $B(-9;0;3)$. 146. $A(7;3;7)$. 147. а) $\overrightarrow{A_1D}$; б) $\overrightarrow{D_1D}$. 152. а) Нет; б) да; в) да. 153. $(2;-4;6)$. 154. $\vec{a}(0;-3;1)$, $\vec{b}(4;1;-2)$. 155. а) -1; б) 2; в) -2. 156. а) C лежит между A и B; б) не лежат; в) A лежит между B и C. 157. а) $A'(8;-1;5)$; б) $O(-11;-12;-2)$. 159. 60°. 160. а) -3; б) 50; в) 28. 161. *Указание.* Достройте данный тетраэдр до параллелепипеда. 164. $C(1;-3;0)$. *Указание.* Воспользуйтесь коллинеарностью векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$. 166. Нет. 169. 2. *Указание.* Найдите $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2$ или найдите $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ и примените теорему Пифагора. 170. 45°, 120°, 60°. 171. $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$. 178. Да, если векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. 183. в) $-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. 184. а) $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CE}$; б) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$. 185. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$. 187. $\sqrt{3}$ *Н*. 188. а) Нет;

б) да. 192. 60°. 194. а) $\vec{a}+0{,}5\vec{b}+\vec{c}$; б) $0{,}5\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; в) $-0{,}5\vec{a}+0{,}5\vec{b}-\vec{c}$. 195. Да. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PD}$. 196. $3\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}$. *Указание.* Воспользуйтесь опорной задачей о точке пересечения медиан треугольника. 197. *Указание.* Воспользуйтесь доказательством от противного и признаком компланарности векторов. 198. *Указание.* Воспользуйтесь опорной задачей о точке пересечения медиан треугольника и неравенством треугольника. 199. *Указание.* Разложите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ по векторам $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PC}$. 200. *Указание.* Разложите векторы ребер основания по векторам $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PC}$. 201. 60°. *Указание.* Введите систему координат с началом O так, чтобы данные лучи лежали на положительных полуосях осей координат. 203. *Указание.* Воспользуйтесь правилом параллелепипеда и опорной задачей о точке пересечения медиан треугольника. 204. 1:8. *Указание.* Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи. 207. 30°. 208. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответы к тестовому заданию № 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
в	г	г	б	б	а	г	б	в	а	в	г

209. а) 6, 2, 8; б) $2\sqrt{26}$; в) $2\sqrt{10}$, 10, $2\sqrt{17}$. 210. 7. 215. $\arccos\frac{4}{9}$. 217. Трапеция. 218. *Указание.* Разложите векторы, изображаемые сторонами треугольника, по векторам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. 219. $C(-1;-2;0)$; точка C. 221. Две или три. 223. 90°; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. *Указание.* Рассмотрите вектор $\overrightarrow{LK}$, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{PC}$. Разложите все указанные векторы по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{PA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{PB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{PC}$. 224. а) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; 90°; б) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 60°. 225. 1:2. *Указание.* Разложите вектор $\overrightarrow{PS}=x\cdot\overrightarrow{PO}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{PM}$, $\vec{b}=\overrightarrow{PN}$, $\vec{c}=\overrightarrow{PK}$. Воспользуйтесь результатом задачи 202 для точек M, N, K, S и найдите x. 227. *Указание.* Примените свойства скалярного произведения векторов. 228. *Указание.* Примените векторный критерий перпендикулярности прямых. 229. а) Ни одного; б) бесконечно много; в) бесконечно много. *Указание.* Рассмотрите расстояния от точки $M(x;y;z)$ до точек $A(1;0;0)$ и $B(0;1;0)$.

Глава II

239. а) 60°; б) 7 см. 240. 3 см. 241. В 1,5 раза. 242. 12 см. 244. Три. 245. 8 см. 246. $9\sqrt{3}$ см². 247. а) $16\sqrt{3}$ см²; б) 62 см². 249. 5 см. 250. 120°. 252. 60°. 253. 13 см. 255. а) (20°; 140°); б) (10°; 180°). 256. а) 7 см; б) 35 см. 257. $\arccos\frac{1}{3}$. 259. Два ребра по 6 см и четыре ребра по 5 см; 48 см². 260. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. 261. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. 262. $\angle AOB=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}$,

$\angle AOC = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha \sin\beta)$. 263. 60°. 264. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. 265. *Указание.* Пусть искомый многогранник имеет n граней. Если все его грани — треугольники, то он имеет $\frac{3n}{2}$ ребер, но 7 не кратно 3. Если же хотя бы одна из граней — не треугольник, то число ребер не меньше 8. 280. $6\sqrt{2}$ см. 281. $4\sqrt{3}$ см². 282. 5 см. 283. 90°, 60°, 30°. 284. 12 см и $6\sqrt{5}$ см. 285. а) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $4ab+2a^2$; в) $6ab+3\sqrt{3}a^2$. 286. 540 см². 287. 114 см². 288. $16\sqrt{3}$ см². 289. $\sqrt{66}$ см. 290. 90 м². 291. 70 м². 292. 296 см². 293. $6a^2\sin\alpha$. 294. 5 см. 297. 4 см, 7 см. 298. $d^2\sin\alpha\sin\beta$. 299. 45°. 300. $n(n-3)$. 303. 2 см. 304. 26 см. 305. 140 см². 306. 1248 см². 307. 8 см. 308. $(32+16\sqrt{3})$ см². 309. 48 см². 310. 112 см². 311. 270 см². 314. а) 21 см; б) 9 см; в) 13 см. 315. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 316. $4d^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}\beta$. 317. $4\sqrt{2}Q\operatorname{ctg}\alpha$. 318. 17 см. *Указание.* Определите искомое расстояние по развертке поверхности призмы. 319. $\frac{4l^2\sin\beta}{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\beta}$. 320. 60°. 321. $\frac{\sqrt{2}S\operatorname{ctg}\alpha}{8}$. 322. $2a^2(1+\sqrt{3})$. 323. 192 см². 330. *Указание.* Воспользуйтесь свойствами многогранных углов. 336. $9\sqrt{3}$ см². 337. 13 см и 15 см. 338. 45 см². 340. а) 10 см; б) 15 см; в) 3 см. 341. а) 4 см; б) 36 см². 342. а) 4 см; б) $\sqrt{5}$ см; в) 32 см². 343. а) 6 см; б) $\sqrt{5}$ см. 344. ≈145 м. 345. а) 36 см²; б) 80 см²; в) 360 см². 346. 96 см². 347. 48 см². 348. 4 см. 349. $\frac{12\sqrt{3}m^2}{\cos\beta}$. 350. $4l^2\operatorname{ctg}\beta$. 351. 5 м и $\sqrt{58}$ м. 352. 24 см. 356. а) $\sqrt{6}$ см; б) $\sqrt{5}$ см; в) $2R\sin^2\alpha$. 357. а) $\sqrt{2}$ см; б) 10 см. 358. 27 см². 359. $18\sqrt{3}$ см². 360. $\frac{3\sqrt{3}m^2}{\cos^2\beta}\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)$. 361. $16d^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)$. 362. 60°. 363. 8 см². 364. 3, 4, 5. 365. а) $\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\cos\gamma}}$; б) $\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\cos\gamma}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{\cos\gamma}}$. 367. а) $a(1+\cos\alpha)$; б) $2\sqrt{3}a\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 369. $3S$. *Указание.* Разрежьте пирамиду по боковым ребрам и докажите, что полученная развертка — треугольник, а стороны оснований пирамиды — его средние линии. 370. $\frac{\sqrt{3}l^2}{3\cos^2\beta\sin\beta}$. 371. $\frac{16m^2}{\sin^2\alpha}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$. 372. $\frac{3\sqrt{3}l^2}{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}}$. 373. $\frac{4H^2\sin\beta}{\cos^2\beta}(1+\sin\beta)$. 374. 150°. 375. 5 см, 5 см и 8 см.

385. б) 8 см; в) $24\sqrt{2}$ см². 386. в) 48 см². 387. в) $\frac{a^2}{\cos\beta}(1+\sin\beta)$. 389. 24 см. 390. $8\sqrt{3}$ см². 391. $\frac{a\,\mathrm{ctg}\,\gamma}{2\sin\alpha}$. *Указание.* Воспользуйтесь формулой $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$. 392. $\frac{a\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\sin\alpha}$. 394. 72 см². 395. 36 см². 396. а) 48 см²; б) 36 см². 397. $\frac{ab}{2\cos\alpha}$. 398. 54 см². 399. $\frac{4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\beta\right)$. 400. в) $a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$. 401. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\beta}(1+2\sin\beta)$. 402. Середина большего основания; 14 см. 403. $\frac{2m^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\gamma}$. 404. $\frac{c^2\sin2\alpha}{4\cos\beta}$. 405. $\frac{b^2\sin\alpha}{2\cos\beta}$. 406. $\frac{4H^2\,\mathrm{ctg}\,\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$. 407. $\frac{4l^2\sin\beta}{\sin\alpha}$. 408. $\frac{a^2\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4\cos\beta}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta\right)$. 409. $\left(210\sqrt{3}+588\right)$ см². 410. $\frac{r^2\,\mathrm{ctg}^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}(\sin\beta+2)$. 411. $\frac{m^2(1+\cos\beta)^2\,\mathrm{ctg}\,\beta}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha+\frac{1}{\sin\beta}\right)$. 412. $\frac{\sqrt{2}d\,\mathrm{tg}\,\beta}{2}$. 413. $\frac{r\,\mathrm{tg}\,\beta\left(1+\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$. 414. $\frac{4d^2}{\sin^2\beta\sin\alpha\cos\beta}$. 415. $\frac{4a^2\,\mathrm{tg}^2 2\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$. 430. 50 см². 431. $64\sqrt{2}$ см². 432. 225 см². 433. 18 см². 434. $48\sqrt{2}$ см². 435. 400 см². 436. 760 см². 437. а) Равнобедренная трапеция; б) 30 см². 438. $9\sqrt{2}$ см². 439. $\frac{3}{8}b^2\sin2\alpha$. 441. $\sqrt{34}$ см; 5 см. 442. 4 см. 443. 256 см². 444. 125 дм². 445. 324 см². 448. 65 см². *Указание.* Докажите, что высота сечения, проведенная к диагонали основания, параллельна диагонали параллелепипеда. 449. $\sqrt{3}H^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. 450. 128 см². 452. 560 см². 453. 672 см². 454. $18\sqrt{2}$ см². *Указание.* Докажите, что высота сечения, проведенная к диагонали основания, параллельна боковому ребру и равна его половине. 455. $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\beta}$. 456. 8 м. 457. $\frac{72}{49}m^2\cos^2\alpha$. 458. 100 см². 459. $\frac{\sqrt{3}\left(b^2-a^2\right)}{4\cos\alpha}$. 461. Правильный шестиугольник; $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. 462. 140 см². 463. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* Докажите, что все диагональные сечения

данной пирамиды равновелики. 464. $45°$. 465. 30,9375 $см^2$. 466. $16\sqrt{2}\left(3+\sqrt{41}\right)$ $см^2$. 467. 4 $см^2$ и 16 $см^2$. 468. 48 см. 469. 54 $см^2$. 470. 396 $см^2$. 471. Нет. 472. $9\sqrt{3}$ $см^2$. 482. а) $a^2\sqrt{3}$; б) $6a^2$; в) $2a^2\sqrt{3}$; г) $5a^2\sqrt{3}$. 483. а) $45\sqrt{3}$ $см^2$; б) $30\sqrt{3}$ $см^2$; в) $15\sqrt{3}$ $см^2$; г) $9\sqrt{3}$ $см^2$. 485. а) $2\sqrt{3}$ $см^2$; б) $\frac{8m^2\sqrt{3}}{3}$. 486. а) $54\sqrt{3}$ $см^2$; б) $2d^2$. 489. а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $\pi-\arccos\frac{1}{3}$. 491. 16 $см^2$ или $8\sqrt{2}$ $см^2$. 492. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. 497. 9:1. 498. Квадрат. *Указание.* Воспользуйтесь перпендикулярностью скрещивающихся ребер правильного тетраэдра. 499. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 500. 144π $см^2$. 501. $\sqrt{3}:2$.

Ответы к тестовому заданию № 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
б	в	г	а	в	г	б	в	б	г	г	а

503. $60°$. 504. $96\sqrt{2}$ $см^2$. 505. 330 $см^2$. 506. $25\sqrt{3}$ см. 507. $\frac{6S^2}{Q}$. 509. $\frac{a^2\left(\sqrt{3}+2\right)}{2}$. 510. $\frac{a}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$. 511. $\frac{3a}{2}$. 512. $\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 513. $2l^2\cos^2\alpha\sin\gamma$. 514. 512 $см^2$, 800 $см^2$. 515. $\frac{4a^2}{3}$. 518. *Указание.* Рассмотрите трехгранный угол, вершина которого лежит внутри данного трехгранного угла, а ребра перпендикулярны граням данного трехгранного угла. 520. $\frac{3\sqrt{6}a^2}{4}$, нет. 521. $8\sqrt{10}$ $см^2$. 522. $\frac{15S}{16}$. 524. в, г. *Указание.* Воспользуйтесь результатами задач 199, 200. 525. *Указание.* Рассмотрите развертку данного тетраэдра. 526. б. *Указание.* Достройте тетраэдр до прямоугольного параллелепипеда. 527. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$. *Указание.* Примените векторный метод. 528. $\frac{\sqrt{105}}{6}$. *Указание.* Примените векторный метод.

Глава III

537. 10 см или $\sqrt{265}$ см. 538. 3 см; $6\sqrt{3}$ см. 539. 48 $см^2$. 540. 16π $см^2$. 541. 8 см. 542. $12\sqrt{3}$ $см^2$. 543. 169π $см^2$. 544. а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$; б) $48\sqrt{3}$ $см^2$. 545. а) 168 $см^2$; б) $a^2\sqrt{2}$. 546. а) $\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{1}{2}\sqrt{S\operatorname{ctg}\alpha}$; б) $4m^2\operatorname{tg}\alpha$.

547. $\dfrac{2\sqrt{3}S}{3}$. 548. $d\sin\beta$, $\dfrac{d\cos\beta}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. 550. $\dfrac{4m^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$. 551. $l^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin 2\beta$.

552. 61 см^2. 553. $Q\sin\varphi$. 554. $\dfrac{S}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. 555. $7\sqrt{3}$ см или $\sqrt{3}$ см.

556. $\dfrac{2R}{\cos\varphi}$. 557. а) 24 см; б) 280 см^2. 558. 15 см или 3 см. *Указание*. Ортогональной проекцией данного квадрата на плоскость основания цилиндра является прямоугольник или отрезок. 559. 24 см^2. 560. 30°. 561. 15 см.

569. $9\sqrt{3}$ см, 9 см; равносторонний треугольник. 570. $\dfrac{H}{\sin\alpha}$, $H\operatorname{ctg}\alpha$.

571. $\approx 32{,}5$ м^2. 572. 8 см^2. 573. $\dfrac{2R^2}{3}$. 574. 120 м^2. 575. 3 см.

576. а) 10 см и 20 см; б) 81π см^2. 577. 20 см. 579. а) 5 м; б) 2 м. 580. 132 см^2. 581. 25π см^2. 582. $3\sqrt{3}$ см, 3 см. 583. 300 см^2.

584. 30°. 585. $\dfrac{S\sin 2\alpha}{\sin\beta}$. 586. $\dfrac{H^2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. 587. Три отрезка по 6 см.

588. 16π см^2, 64π см^2. 589. 84 см^2. 590. 768 см^2. *Указание*. Докажите, что диагональ осевого сечения перпендикулярна образующей, с которой она имеет общий конец. 591. 8 см. 592. 84,5 см^2. *Указание*. Искомое сечение проходит через две взаимно перпендикулярные образующие. 593. $0{,}75l$.

594. $\dfrac{d^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{\cos\alpha}$. 595. 500 см^2. 596. 8 см. 597. $\left(3+2\sqrt{2}\right):1$. 598. 25 см или 7 см. 599. а) 10 см; б) $2\sqrt{13}$ см. 607. а) 15 см; б) 10 см; в) 18 см. 608. 8 см. 609. а) 25π см^2; б) 41 см; в) 3 см. 610. ≈ 110 м. 611. $3\sqrt{3}$ см. 614. 12 см. 615. $36\sqrt{3}$ см^2. 616. 24 см. 617. 17 см. 618. 6 см.

619. 8 см, 2 см. 620. 24 см, 32 см. 622. $\sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$. 623. $\dfrac{\pi R^2}{4}$. 624. $\approx 24\,233$ км.

626. 7 см. 627. 15 см. 628. $0{,}5a$. 629. 90°. 630. а) 7 см; б) 20 см. 631. а) 5 см; б) 5 см. 632. 10 см и 15 см. 633. 30 см. 635. 16π см. 636. а) Плоскость, перпендикулярная отрезку с концами в данных точках и проходящая через его середину; б) две плоскости, параллельные данной и удаленные от нее на R; в) сфера с центром в центре данного шара

и радиусом $\sqrt{R^2-\frac{S}{\pi}}$. 637. а) Сфера с центром A и радиусом R; б) прямая, перпендикулярная плоскости α и проходящая через точку A (кроме точки A); в) большой круг, плоскость которого перпендикулярна данной прямой. 638. $h\sqrt{2S}$. 639. $\frac{1}{2}\sqrt{d^2-h^2}$.

Ответы к тестовому заданию № 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
в	а	б	в	а	б	б	г	а	в	б	г

640. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. 641. $R-\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-d^2}$. 642. а) $\frac{l\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{l\sqrt{3}}{3}$. 643. 45°. 644. 9π см^2. 645. $2Q$. 647. 5 : 8. 648. $\left(2\sqrt{3}+1\right):11$. 649. 5. 651. $\frac{4}{3}R$.

Глава IV

653. 10 000 м. 654. Нет. 655. Да, увеличится в 2 раза. 656. 4 дм. 660. а) 216 см^3; б) 125 дм^3; в) 343 см^3. 661. 2 см^3. 662. а) 0,008 м^3; б) 27 дм^3. 663. а) 160 см^3; б) 6912 см^3; в) $ab\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. 664. 30 дм. 665. а) 6,4 см^3; б) 960 м^3; в) $1280\sqrt{3}$ см^3. 666. а) 84 см^2; б) $aS\sin\alpha$. 667. 54 см^3. 668. $\frac{\sqrt{3}a^2H}{4}$; a^2H; $\frac{4h^3\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3\cos\alpha}$. 669. $20\sqrt{3}$ см^3. 670. 324 см^3. 671. а) 360 см^3; б) 72 см^3; в) 9 см^3. 672. 5 см. 673. 70 см^3. 674. 96 см^3. 675. а) 75π см^3; б) 16π см^3; в) 54π см^3. 676. а) 80π см^3; б) 150π дм^3. 677. $\frac{4V}{\pi d}$. 678. Да. 679. $\frac{\pi d^3}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$ или $\frac{\pi d^3}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}$. 680. $\frac{\sqrt{3}d^3}{9}$. 681. $Q\sqrt{Q}$. 682. 2 см. 683. 5 см. 684. $6\sqrt{95}$ см^3. 685. 36 000 см^3. 686. $480\sqrt{3}$ см^3. 687. $\frac{\sqrt{2SS_1S_2}}{2}$. 688. 12 см^3. 690. $80\sqrt{2}$ см^3. 692. 252 см^3. 693. 216 см^3 или 108 см^3. 694. 81 см^3. 695. $a^3\sin2\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. 696. $\frac{aS}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. 697. $\frac{d^3\left(\sin\alpha+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{4\,\mathrm{tg}\,\beta}$. 698. $\frac{1}{2}d^3\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta$. 699. $\frac{Q\sqrt{\pi S}}{2}$. 700. $\frac{\pi d^3\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ или $\frac{\pi d^3\sin\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. 701. $\frac{\pi m^3\sin\beta\cos^2\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. 702. 30 см^3.

<u>703</u>. $\frac{l^2}{24}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)$. 704. $\frac{\pi\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}\gamma}{4}$. <u>705</u>. $\frac{\pi a^2 H}{4\sin^2\alpha}$. 706. $\frac{dl(d+b)}{2}$.

<u>707</u>. $3\sqrt{3}r^2 l$. 708. 4:1. <u>709</u>. $16:3\sqrt{3}$. 710. $\frac{1}{2}\pi Q\sin\alpha\sin\beta\sqrt{Q\cos\beta\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.
<u>711</u>. $\frac{\pi d^2}{4\sin^2\beta\cos^2\alpha\cos\beta}$. *Указание*. Докажите, что данный перпендикуляр лежит в боковой грани призмы. 712. $\operatorname{arctg}\sqrt{6}$. 713. $\frac{\sqrt{\pi S}}{\pi\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

714. а) Уменьшится в 3 раза; б) увеличится в 2 раза. 715. а) 1:3; б) 1:9. 716. 2:1. 717. 27. 722. а) 20 см^3; б) 80 дм^3; в) 300 см^3. <u>723</u>. а) 80 см^3; б) 240 см^3; в) 288 дм^3. 724. а) $\sqrt{3}a^3\sin\alpha\cos^2\alpha$; б) $\frac{\sqrt{3}R^3\operatorname{tg}\beta}{4}$.
725. а) $\frac{4}{3}h\left(a^2-h^2\right)$; б) $\frac{4}{3}l^3\sin^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}$. <u>726</u>. а) $\frac{2}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\frac{\sqrt{3}}{4}h^3\operatorname{ctg}^2\alpha$. 727. 1125 см^3. <u>728</u>. 5 см^3. 729. $66\frac{2}{3}$ см^3. <u>730</u>. $8\sqrt{3}$ см^3.
731. 2 см^2. <u>732</u>. 28 см^3. 733. а) 8π см^3; б) 100π см^3; в) 9π см^3.
734. 52π см^3. <u>735</u>. 7 см. 736. $\frac{3V}{\pi Q}$. <u>737</u>. $\frac{3V}{S}$. 738. а) 36π см^3; б) 288π см^3; в) $\frac{32\pi}{3}$ см^3. <u>739</u>. $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$. 740. $\frac{16d^3}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}$. <u>741</u>. $\frac{16}{3}m^3\operatorname{tg}\beta$.
742. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4\sin\alpha\cos^2\alpha}$. <u>743</u>. $2\sqrt{3}d^3\sin\beta\cos^2\beta$. 744. $\frac{1}{24}c^3\sin2\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma$.
<u>745</u>. $\frac{b^3\operatorname{ctg}\gamma}{48\sin^2\frac{\beta}{2}}$. 746. $\frac{2}{3}c^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\gamma$. 747. $\frac{1}{3}r^3\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$.

<u>748</u>. $\frac{4h^3\sin\gamma\cos^2\gamma}{3\sin\beta}$. 749. $\frac{2}{3}r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$. <u>750</u>. $\frac{1}{3}a^3\operatorname{ctg}^2\gamma$.
751. $\frac{1}{6}a^3\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\beta$. <u>752</u>. $\frac{1}{12}b^3\sin^2\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$. 753. $\frac{1}{12}\operatorname{tg}\varphi\cdot\left(a^3-b^3\right)$.
<u>754</u>. 4 см. 755. 8π см^3. <u>756</u>. 12π см^3. 757. $\frac{\pi}{3}ah^2$. <u>758</u>. $\frac{1}{4}\pi a^3$.

759. 1 см и 5 см. <u>760</u>. 2 см и 5 см. 761. $\frac{4}{3}\pi\left(d^2+\frac{S}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$. <u>762</u>. 9 см.

763. 252π см^3, 468π см^3, 252π см^3. 764. $\frac{4}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{4}$. <u>765</u>. 126π см^3,

4374π см^3. 766. $\frac{1}{3}r^3\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\beta-1}$. 767. $\frac{l^3}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$. 768. $\frac{4h^3\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3\cos\alpha}$. 769. $\frac{1}{12}b^3\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\left(3-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\right)$. 770. $\frac{8\sqrt{2}b^3\operatorname{tg}\alpha}{3\left(1+2\operatorname{tg}^2\alpha\right)^{1,5}}$.

771. $-\frac{\pi l^3\operatorname{tg}\gamma}{3\cos^3(\alpha+\beta)}$. 772. $\frac{1}{24}\pi a^3\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)$. 774. $\frac{\sqrt{3}c^3\left(1+4\operatorname{tg}^2\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}{4\operatorname{tg}^2\gamma}$.

775. 15 см. 776. 30°. 777. Да. 778. Нет. 780. Да. 781. 9:2. 782. $\frac{4+4\pi}{1+4\pi}$. 784. а) 30π см^2; б) 24π см^2; в) $\frac{3}{2}\pi a^2$; г) $\frac{\sqrt{2}\pi c^2}{4}$. 785. 6π см^2. 786. 147π см^2. 787. $2\pi\left(3\sqrt{2}+5\right)$ см. 788. 80π см. 789. а) 16π см^2; б) 36π см^2. 790. В 4 раза. 791. 144π см^2. 792. 90°. 793. $\frac{\pi d^2\cos\gamma(\cos\gamma+2\sin\gamma)}{2}$. 795. $\frac{\pi d^2\sin 2\beta}{2\sin\alpha}$.

796. $\frac{\pi a^2\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\sin^2\alpha}$. 797. $\frac{4\pi m^2\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. 798. 16π см^2. 799. $8\pi d^2\cos\varphi\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

800. 400π см^2. 801. $\pi r^2+2\pi R\left(R-\sqrt{R^2-r^2}\right)$. 802. 18 см. 803. 275π см^2. 804. $2\pi R\left(R+\sqrt{R^2-r^2}\right)$. 805. $\frac{4\pi h^2}{\left(1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}$. 806. $\frac{\pi H^2}{\cos^2\beta}$.

807. $\pi a^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$. 808. $\frac{2\pi d^2}{\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi}$. 809. $\frac{2\pi m^2}{\sin^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}$.

810. $\frac{\pi d^2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi}{2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\varphi\right)}$. 811. $\frac{\pi a^2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\varphi\right)}$.

Ответы к тестовому заданию № 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
г	б	а	г	б	в	г	б	а	б	г	в

812. 1 см^3. *Указание.* Выберите в качестве основания пирамиды одну из боковых граней. 813. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. 814. $2\pi R^3$, $6\pi R^2$. 815. $\frac{\pi R^3}{\sqrt{3}}$, $3\pi R^2$.

816. 1:7:19:37. 817. $\frac{b}{a}$. 818. $\frac{\pi R^2\left(4-\sqrt{2}\right)}{2}$. 822. Две плоскости, параллельные плоскости данного многоугольника и удаленные от нее на $\frac{3V}{S}$.

824. $\frac{1}{16}a^3\sin 2\alpha$; $\frac{1}{24}a^3\operatorname{tg}\alpha\left(2-3\cos^2\alpha\right)$. 825. $\frac{a^3\cos\frac{\varphi}{2}}{3\sqrt{-2\cos\varphi}}$.

826. $\frac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{2\pi S\cos\alpha}}{6\pi\cos\frac{\alpha}{2}}$. 829. *Указание.* Рассмотрите параллелепипед, который образуется при проведении через каждое ребро тетраэдра плоскости, параллельной противолежащему ребру. 830. $\frac{1}{24}(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\operatorname{tg}\alpha$. 837. $\overline{(3;-1;2)}$; да; нет. 838. $\overline{(2;-1;4)}$, $\overline{(1;1;0)}$, нет. 839. Пересекает плоскости xOz, yOz, параллельна xOy (или лежит в ней); может. 840. а) Параллельны; б) пересекаются; в) совпадают. 841. а) (1; −3; 2), $R=8$; б) (−5; 0; 6), $R=11$; в) (0; 0; 0), $R=2\sqrt{2}$. 842. B, C, E. 843. (6; 0; 0), (0; 3; 0), (0; 0; −2). 844. $-3x+2y+z+10=0$. 845. а) $4x+2y+z-7=0$; б) $7x+9-2z=0$. 846. $5x+y-4z-13=0$. 847. B, D, E. 848. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-1}{3}$. 849. $\frac{x-4}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{5}$. 850. (6; 2; 0), (3; 0; 1), (0; −2; 2). 853. а) $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$; б) $x^2+y^2+z^2=49$. 855. а) $2x-3y+6z-6=0$; б) $x-y+2z-5=0$. 857. $3x-y-z-6=0$. 858. $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-2}{5}$. 859. (1; −1; 5). 860. $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{3}$. 862. а) 30°; б) 90°; в) 60°. 863. а) $a=6$, $b=-4$; б) $a=1$, $b=-3$. 864. а) $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$; б) $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$; в) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. 865. а) $(x+1)^2+(y-5)^2+(z+6)^2=81$ или $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=81$; б) $(x+3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=25$. 866. Плоскость $4x-2y+3z-29=0$. 867. $x+2y-6=0$. 868. $17x-13y-16z-10=0$. 869. а) Совпадают; б) параллельны; в) пересекаются в точке (4; 4; 3); г) скрещиваются. 871. Сфера $(x-3)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=121$ без точек A и B. 872. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 874. $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}$. 875. а) 60°, $\frac{a}{\sqrt{3}}$; б) $\arccos\frac{1}{3}$; в) $\arcsin\frac{2}{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Апофема правильной пирамиды 110, 168
— — усеченной пирамиды 139, 169

Б

Боковая поверхность конуса 259
— — пирамиды 109
— — призмы 94
— — усеченного конуса 260
— — цилиндра 256
Большáя окружность 200
Большой круг 200

В

Вектор 41, 70
— нормали 277
— нулевой 41
Векторы компланарные 54, 73

Г

Гомотетия 35, 70
Градусная мера двугранного угла 82, 165
Граница фигуры 204

Д

Движение 17, 68
Диаметральная плоскость шара 200, 215
Диаметр шара (сферы) 198, 214
Длина (модуль) вектора 42, 70
Додекаэдр правильный 153

И

Измерения прямоугольного параллелепипеда 98
Икосаэдр правильный 153
Интегральная формула объема 237

К

Касательная плоскость к конусу 191
— — — сфере (шару) 201, 215
— — — цилиндру 182
— прямая к сфере (шару) 202, 215
Конус 189, 212
— вписанный в пирамиду 240
— описанный около пирамиды 240
— прямой 189, 213
— усеченный 192, 213
Координаты вектора 41, 70
— середины отрезка 9, 68
Куб (правильный гексаэдр) 99, 153, 167, 169

Л

Лента Мебиуса 27

М

Многогранник 85
— вписанный в сферу 261
— выпуклый (невыпуклый) 86, 165
— описанный около сферы 260
— правильный 152
Многогранники звездчатые 157
— полуправильные 155

О

Образующая конуса 189
— усеченного конуса 192
— цилиндра 181
Объем конуса 240
— куба 223
— многогранника 221
— — описанного 261
— параллелепипеда 224
— прямоугольного параллелепипеда 223
— пирамиды 238
— призмы 226
— — наклонной 227
— усеченного конуса 240
— усеченной пирамиды 238
— цилиндра 227
— шара 241
— шарового сегмента 243
— — сектора 244
Объемы подобных тел 246
Октаэдр правильный 153
Орт 57
Ось поворота 23
— симметрии 18, 69
— тела вращения 179

П

Параллелепипед 96
— прямоугольный 98
Параллельный перенос 25, 69
Пирамида 108, 167
— вписанная в конус 240
— описанная около конуса 240
— правильная 109, 168
— усеченная 138, 169

Поворот 23, 69
Преобразование подобия 34, 70
Принцип Кавальери 237
Площадь боковой поверхности конуса 259
— — — пирамиды 109, 167
— — — призмы 94, 166
— — — усеченного конуса 259
— — — цилиндра 256
Площадь поверхности тела 255
— полной поверхности конуса 259
— — — пирамиды 109
— — — призмы 94
— — — усеченного конуса 260
— — — цилиндра 256
— сферы 262
Правило многоугольника 43, 71
— параллелепипеда 44, 71
— параллелограмма 43, 71
— треугольника 43, 71
Призма 92, 166
— вписанная в цилиндр 227
— наклонная 93, 166
— описанная около цилиндра 228
— правильная 93, 167
— прямая 93, 166

Р

Радиус шара 198
Расстояние между точками 10
Разность векторов 43, 72

С

Сечение геометрического тела 134
— осевое тела вращения 179
— пирамиды диагональное 138
— призмы диагональное 137
— — перпендикулярное 137
Симметрия
— зеркальная 19
— относительно плоскости 18, 69
— — прямой (осевая) 18, 69
— — точки (центральная) 18, 69
— поворотная 24
Скалярное произведение векторов 45, 73
След 141
Сумма векторов 43, 71
Сфера 198, 214
— вписанная в выпуклый многогранник 260
— описанная около многогранника 261

Т

Тетраэдр 108, 167
— правильный 153, 169
Тела Архимеда 155
— платоновы 154
— равновеликие 222
— равносоставленные 222
— Федорова 158
Тело геометрическое 205
— вращения 179
Точка касания 201
— внутренняя 204
— граничная 203

У

Угол двугранный 81, 165
— — выпуклого многогранника 87
— — при основании пирамиды 108
— — трехгранного угла 83
— линейный двугранного угла 81
— многогранный 84
— трехгранный 83
Уравнение плоскости 277
— сферы 283
Уравнения прямой канонические 280
Усеченная пирамида 138, 169
Усеченный конус 192, 223

Ф

Фигуры гомотетичные 70
— подобные 34, 70
— равные 17, 68

Ц

Центр симметрии 18, 69
— шара (сферы) 198
Цилиндр 180, 212
— вписанный в призму 228
— описанный около призмы 227
— прямой 180, 212

Ш

Шар 198
Шаровой сегмент 243
— сектор 244
— слой (пояс) 245

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
Как пользоваться учебником 3

Глава I. Координаты, векторы и геометрические преобразования в пространстве

§ 1. Декартовы координаты в пространстве 7
§ 2. Движения в пространстве. 17
§ 3. Подобие пространственных фигур. 34
§ 4. Векторы в пространстве 41
§ 5. Применение метода координат и векторов к решению стереометрических задач. 54
Тестовое задание для самопроверки № 1. 66
Итоги главы I 68

Глава II. Многогранники

§ 6. Двугранные и многогранные углы. Многогранник 81
§ 7. Призма 92
§ 8. Пирамида 108
§ 9. Некоторые виды пирамид 120
§ 10. Сечения многогранников 134
§ 11. Правильные многогранники 152
Тестовое задание для самопроверки № 2 162
Итоги главы II 165

Глава III. Тела вращения

§ 12. Цилиндр 179
§ 13. Конус. 189
§ 14. Шар и сфера 198
Тестовое задание для самопроверки № 3. 210
Итоги главы III 212

Глава IV. Объемы и площади поверхностей геометрических тел

§ 15. Объем многогранников. Объем параллелепипеда, призмы и цилиндра 221
§ 16. Объемы пирамиды, конуса и шара 236
§ 17. Площади поверхностей геометрических тел 255
Тестовое задание для самопроверки № 4 266
Итоги главы IV 268

Приложение 1. Уравнения фигур в пространстве 277

Приложение 2. Доказательство формулы объема прямоугольного параллелепипеда 289

Ответы 291

Предметный указатель 302

Навчальне видання

ЄРШОВА Алла Петрівна
ГОЛОВОРОДЬКО Вадим Володимирович
КРИЖАНОВСЬКИЙ Олександр Феліксович
ЄРШОВ Сергій Володимирович

ГЕОМЕТРІЯ. 11 клас. Академічний рівень. Профільний рівень
Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів

(російською мовою)

Редактор *О. В. Костіна*. Технічний редактор *С. В. Захарченко*
Коректор *Н. В. Красна*

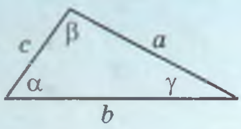
Підписано до друку 20.12.2011. Формат 70×90/16. Папір друкарський.
Гарнітура Шкільна. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 22,17.

ТОВ Видавництво «Ранок». Свідоцтво ДК № 3322 від 26.11.2008.
61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.
Для листів: 61045 Харків, а/с 3355. E-mail: office@ranok.com.ua
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.
З питань реалізації: (057) 712-91-44, 712-90-87. E-mail: commerce@ranok.com.ua
«Книга поштою»: (057) 717-74-55, (067) 546-53-73. E-mail: pochta@ranok.com.ua
www.ranok.com.ua

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ПЛАНИМЕТРИИ

ТРЕУГОЛЬНИКИ

Произвольный треугольник

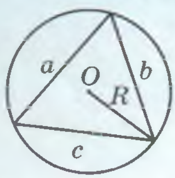


Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Теорема косинусов

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$



Площадь треугольника

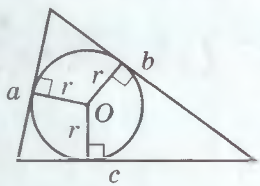
$S=\dfrac{1}{2}ah_a$, где h_a — высота к стороне a

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Формула Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

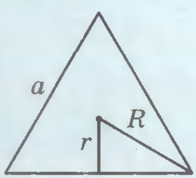
где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр



Формулы радиусов

$$R=\frac{abc}{4S} \qquad r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{S}{p}$$

Равносторонний треугольник



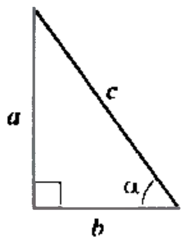
Формула высоты $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

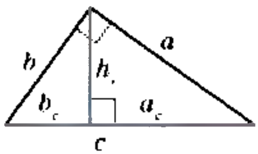
Площадь $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

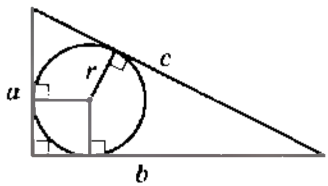
Формулы радиусов

$$R=\frac{a}{\sqrt{3}} \qquad r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Прямоугольный треугольник







Теорема Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$

Тригонометрические функции

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ $\quad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$

Метрические соотношения

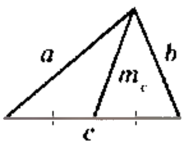
$$h_c = \frac{ab}{c} = \sqrt{a_c \cdot b_c}$$

$a^2 = a_c \cdot c$ $\quad$ $b^2 = b_c \cdot c$

Площадь $S = \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2}ch_c$

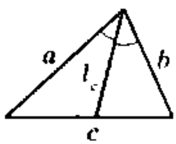
Формулы радиусов $R = \dfrac{c}{2}$, $r = \dfrac{a+b-c}{2}$

Медиана

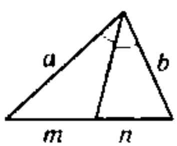


$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

Биссектриса



$$l_c^2 = ab - mn$$

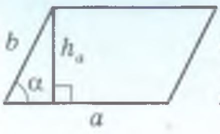


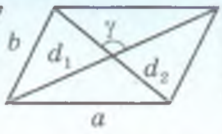
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ПЛАНИМЕТРИИ

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Произвольный параллелограмм





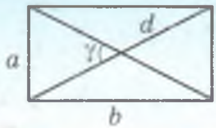
Соотношения между диагоналями и сторонами

$$d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right)$$

Площадь

$S=ah_a$ $\qquad S=ab\sin\alpha$ $\qquad S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$

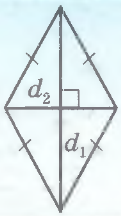
Прямоугольник



Площадь $S=ab$, $S=\frac{1}{2}d^2\sin\gamma$

Радиус описанной окружности $R=\frac{d}{2}$

Ромб

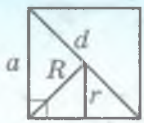


Площадь

$S=ah$ $\qquad S=a^2\sin\alpha$ $\qquad S=\frac{1}{2}d_1d_2$

Радиус вписанной окружности $r=\frac{h}{2}$

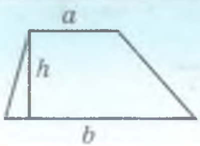
Квадрат

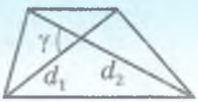


Площадь $S=a^2$, $S=\frac{1}{2}d^2$

Формулы радиусов $R=\frac{d}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $r=\frac{a}{2}$

Трапеция



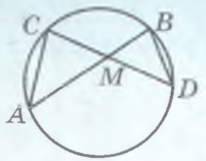


Площадь

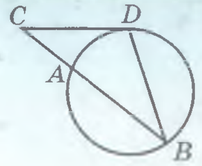
$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$ $\qquad S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$

ОКРУЖНОСТЬ

Метрические соотношения в окружности

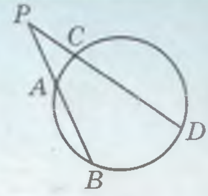


$AM \cdot BM = CM \cdot DM$



CD — касательная,

$CD^2 = CB \cdot CA$



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Окружность, круг и их элементы

Длина окружности

$C = 2\pi R$

Площадь круга

$C = \pi R^2$

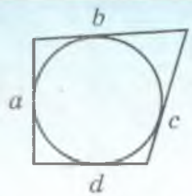
Длина дуги

$l_\alpha = \dfrac{\pi R}{180} \cdot \alpha$

Площадь кругового сектора

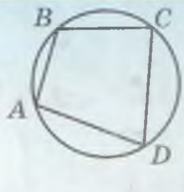
$l_{\text{сект}} = \dfrac{\pi R^2}{360}$

Описанный четырехугольник



$a + c = b + d$

Вписанный четырехугольник



$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$

Формулы радиусов вписанной и описанной окружностей для правильного n-угольника со стороной a_n

$$r = \frac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180^\circ}{n}}$$

$$R = \frac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$$